This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Mathematics
QA
648
.F68

B 492904

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR LES

DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES

DES

PIÈCES ET DES SYSTÈMES DE PIÈCES

A FIBRES MOYENNES PLANES OU GAUCHES

THÉORIE NOUVELLE ET APPLICATIONS

PAR

M. BERTRAND DE FONTVIOLANT

INGÉNIEUR A LA COMPAGNIE DE FIVES-LILLE
RÉPÉTITEUR DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE A L'ÉCOLE CENTRALE

PREMIÈRE PARTIE

LES DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES — LEUR RÉCIPROCITÉ

Présenté à l'Académie des Sciences, le 6 Août 1888 (tome CVII des Comptes rendus)

Extrait des Mémoires de la Société des Ingénieurs civils.

PARIS
G. STEINHEIL, ÉDITEUR
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE CENTRALE
2, rue Casimir-Delavigne, 2

1888

Digitized by Google

...matics
QA
648
.F68

Digitized by Google

5474

(116) 11.3

Alexandre Finet

MÉMOIRE

SUR LES

DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES

DES

PIÈCES ET DES SYSTÈMES DE PIÈCES

A FIBRES MOYENNES PLANES OU GAUCHES

THÉORIE NOUVELLE ET APPLICATIONS

PAR

M. BERTRAND DE FONTVIOLANT

INGÉNIEUR A LA COMPAGNIE DE FIVES-LILLE
RÉPÉTITEUR DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE A L'ÉCOLE CENTRALE

PREMIÈRE PARTIE

LES DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES — LEUR RÉCIPROCITÉ

Présenté à l'Académie des Sciences, le 6 Août 1888 (tome CVII des Comptes rendus)

Extrait des Mémoires de la Société des Ingénieurs civils.

PARIS
G. STEINHEIL, ÉDITEUR
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE CENTRALE
2, rue Casimir-Delavigne, 2

1888

Digitized by Google

Prof. Alex. Ziwet
gt.
1-31-1923
Mathematics
QA
648
.F68

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR LES

DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES

DES

PIÈCES ET DES SYSTÈMES DE PIÈCES

A FIBRES MOYENNES PLANES OU GAUCHES

THÉORIE NOUVELLE ET APPLICATIONS

PREMIÈRE PARTIE

LES DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES — LEUR RÉCIPROCITÉ

CHAPITRE PREMIER

Nouvelles formules générales exprimant les déformations d'une pièce fléchie, dont la ligne moyenne est une courbe plane. — Réciprocité des déplacements.

§ 1er. — Hypothèses.

Nous admettrons que les sections normales à la ligne moyenne, planes avant la flexion, restent planes après, et nous supposerons établie la formule connue :

$$R = \frac{vM}{I} - \frac{N}{S},$$

qui résulte immédiatement de cette hypothèse.

Nous admettrons également le principe de la superposition des effets élastiques des forces extérieures, et, comme corollaire, celui de la proportionnalité des forces et des déformations correspondantes.

416658

Digitized by Google

§ 2. — Définitions.

Les différentes espèces de *liaisons* auxquelles une poutre, droite ou courbe, peut être soumise, sont les suivantes :

1° Un point de la poutre, pris dans le plan de flexion, est assujetti à demeurer sur une droite de ce plan : c'est le cas du *repos libre ;*

2° Un point est assujetti à rester entièrement fixe : c'est le cas d'une *articulation ;*

3° Une section est astreinte à conserver une position invariable : c'est le cas d'un *encastrement.*

La flexion étant plane, le nombre des conditions générales d'équilibre se réduit à trois, qui se traduisent par deux équations de projection et une équation de moments.

On reconnaît facilement que les forces de liaison, ou *réactions*, sont calculables par ces équations, dans les deux hypothèses suivantes :

1° *Système de liaisons N° 1.* — Un point de la poutre est assujetti à rester entièrement fixe, tandis qu'un autre point est astreint à demeurer sur une droite donnée du plan de flexion ;

2° *Système de liaisons N° 2.* — Une section est assujettie à conserver une position invariable.

Dès qu'une liaison vient s'ajouter à celles de l'un ou de l'autre système, les forces équivalant aux liaisons ne sont plus indépendantes des déformations élastiques. Mais si l'on remplace cette liaison supplémentaire par la force capable d'en tenir lieu, les autres liaisons redeviennent indépendantes des déformations et les forces correspondantes sont alors calculables par les équations générales d'équilibre.

Nous appellerons les liaisons des systèmes N^os^ 1 et 2 liaisons *indépendantes de l'élasticité*. Toute liaison supplémentaire sera dite *dépendante de l'élasticité* ou *surabondante.*

§ 3. — Travail accompli pendant la déformation.

Sur une pièce supposée sans poids, astreinte ou non à des liaisons surabondantes, appliquons des forces quelconques, situées

Digitized by Google

dans le plan de la ligne moyenne. Imaginons que, partant de la valeur initiale zéro, les intensités de ces forces aillent en croissant progressivement jusqu'à des valeurs finales données; les forces intérieures développées dans la pièce croîtront en même temps, de la valeur zéro jusqu'à des valeurs correspondant à l'état d'équilibre définitif.

Pendant ce mouvement, les forces extérieures directement appliquées et les forces intérieures ont accompli des travaux dont la somme est nulle en vertu du principe des forces vives, puisque les molécules sont parties de l'état de repos pour parvenir à un nouvel état de repos et que les travaux des forces de liaison sont nuls en raison de la nature purement géométrique de ces liaisons.

Calculons en premier lieu les travaux des forces intérieures.

Soient à un instant donné, pendant la déformation, RdS, R$_1$ dS, les composantes perpendiculaire et parallèle à la section M N, de la force intérieure agissant sur un élément superficiel dS situé à une distance v du centre de gravité de cette section *(fig. 1)*.

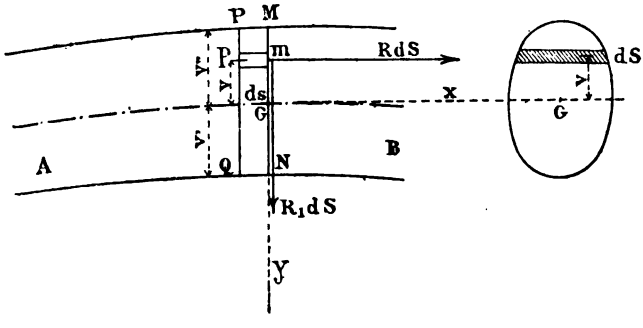


FIG. 1.

Évaluons d'abord le travail des efforts longitudinaux R dS.

Appelons ds l'épaisseur de la tranche infiniment petite MNPQ, mesurée avant toute déformation; c'est aussi la longueur de la fibre pm de section transversale dS.

A l'instant considéré, cette longueur s'est accrue d'une quantité $\Delta(ds)$, liée à la valeur de R correspondante par la formule connue :

$$R = E \frac{\Delta(ds)}{ds}, \text{ ou } \Delta(ds) = \frac{R}{E} ds,$$

dans laquelle E désigne le coefficient d'élasticité de la matière dans le sens longitudinal des fibres.

Digitized by Google

La flexion continuant, R s'accroît de sa différentielle dR, tandis que l'allongement $\Delta(ds)$ s'accroît de sa différentielle $d[\Delta(ds)]$; il en résulte pour la fibre pm de section dS, un travail élémentaire exprimé par :

$$R\,dS \times d[\Delta(ds)] = R\,dS \times d\left(\frac{R}{E}\,ds\right) = R\,dS\,\frac{dR}{E}\,ds$$

$$= \frac{R\,dR}{E}\,dS\,ds.$$

Pour la flexion complète, c'est-à-dire depuis l'instant où R part de la valeur zéro, jusqu'au moment où il atteint la valeur finale R, le travail a pour expression :

$$(a) \qquad \int_0^R \frac{R\,dR}{E}\,dS\,ds = \frac{1}{2}\,\frac{R^2}{E}\,dS\,ds.$$

Pour passer de là au travail développé dans toute la tranche MNPQ, il suffit de remplacer R par sa valeur $\frac{vM}{I} - \frac{N}{S}$, et d'intégrer la fonction obtenue dans toute l'étendue de la section, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}ds \int_{v'}^{v''} \frac{1}{E}\left(\frac{vM}{I} - \frac{N}{S}\right)^2 dS$$

$$= \frac{1}{2}ds \int_{v'}^{v} \left(\frac{M^2}{EI^2}\,v^2\,dS - \frac{2MN}{EIS}\,v\,dS + \frac{N^2}{ES^2}\,dS\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,ds\left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES}\right),$$

car $\int_{v'}^{v''} v^2\,dS = I$, $\int_{v'}^{v''} v\,dS = 0$, $\int_{v'}^{v''} dS = S$.

Enfin, pour toute la poutre AB, le travail des efforts intérieurs longitudinaux a pour expression :

$$\frac{1}{2}\int_A^B \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES}\right) ds,$$

l'intégrale portant sur toute l'étendue de la poutre

Digitized by Google

On établit d'une manière analogue que le travail des efforts intérieurs $R_t\, dS$, transversaux à la pièce, est donné par la formule :

$$\frac{1}{2}\int_A^B \frac{T^2}{GS}\, ds,$$

dans laquelle T représente l'effort tranchant et G le coefficient d'élasticité de la matière dans le sens transversal aux fibres.

Le travail total des efforts intérieurs a finalement pour valeur absolue :

$$\frac{1}{2}\int_A^B \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS}\right) ds.$$

Si maintenant nous représentons par $\mathfrak{T}$ le travail total des forces extérieures pendant la déformation, nous pouvons poser la formule fondamentale :

$$\mathfrak{T} - \frac{1}{2}\int_A^B \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS}\right) ds = 0,$$

ou

$$(1) \qquad \mathfrak{T} = \frac{1}{2}\int_A^B \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS}\right) ds,$$

en remarquant que les forces intérieures étant résistantes, leur travail est négatif.

§ 4. — Déplacement du point d'application d'une force extérieure, pendant la déformation.

En un point D de la poutre A B *(fig. 2)*, appliquons une force extérieure, dont l'intensité, — ainsi qu'il a été dit plus haut, — est d'abord nulle et croît progressivement jusqu'à une limite donnée.

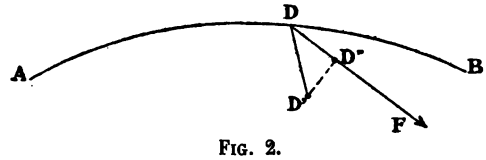


FIG. 2.

En vertu du principe de la superposition, admis dès le début :

Digitized by Google

1° Le déplacement DD′ du point D est rectiligne ;

2° Il est, à chaque instant de la déformation, proportionnel à l'intensité F de la force extérieure au même instant, et il en est de même, par suite, de la projection DD″ de ce déplacement sur la direction de la force F ; en sorte qu'on peut poser :

$$DD'' = \lambda F,$$

λ étant un coefficient constant représentant la valeur de la projection du déplacement du point D, sous l'action d'une force de même direction et du même sens que F, mais égale à l'unité.

Lorsqu'à partir de l'instant considéré, F s'accroît de sa différentielle dF, DD″ s'accroît de sa différentielle :

$$d(DD'') = d(\lambda F) = \lambda dF,$$

et le travail élémentaire accompli par F a pour expression :

$$F \lambda dF = \lambda F dF.$$

Le travail total de la force F, depuis l'instant où elle commence à agir en partant de la valeur zéro, jusqu'à l'instant où elle atteint la valeur F, est donné par la formule :

$$\mathfrak{T} = \int_0^F \lambda F dF = \frac{1}{2} \lambda F^2;$$

d'où, en vertu de l'équation (1) :

$$(2) \qquad \lambda F^2 = \int_A^B \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS} \right) ds.$$

Or, λF est égal à la projection sur F du déplacement total du point D, sous l'action de la force F, projection que nous représenterons par l et qui, dès lors, est exprimée par :

$$(2\,bis) \qquad l = \frac{1}{F} \int_A^B \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS} \right) ds,$$

dans laquelle M, N, T sont les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants produits par la force F.

Digitized by Google

§ 5. — Angle décrit pendant la déformation par une section à laquelle est appliqué un couple extérieur, dont l'axe est dirigé perpendiculairement au plan de la ligne moyenne.

Soit C l'intensité de ce couple qui, ayant à l'origine de la déformation la valeur zéro, croît jusqu'à une valeur finale que nous représenterons également par C. L'angle DaD' *(fig. 3)* dont, à un instant donné, a tourné la section D, est proportionnel à la valeur de C au même instant; de sorte qu'on peut poser: $D\,aD' = \gamma\,C$, γ étant un coefficient constant, représentant le déplacement angulaire de la section D sous l'action d'un couple de même sens que C, mais égal à l'unité.

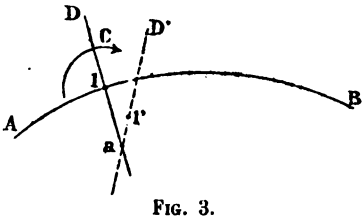


FIG. 3.

Le travail élémentaire développé par le couple, lorsqu'il passe de la valeur C à celle $C + dC$, est :

$$C\,d\,(DaD') = C\,d\,(\gamma\,C) = \gamma\,C\,dC;$$

et le travail total, depuis l'instant où le couple commence à agir jusqu'à l'instant où il atteint la valeur finale C, est donné par la formule :

$$\mathfrak{T} = \int_0^C \gamma\,C\,dC = \frac{1}{2}\,\gamma\,C^2;$$

d'où, en vertu de (1) :

$$(3) \qquad \gamma\,C^2 = \int_A^B \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS}\right) ds.$$

Or, l'angle total g, dont le couple C a fait tourner la section D, est égal à $\gamma\,C$; il est donc exprimé par la formule :

$$(3\,bis) \qquad g = \frac{1}{C}\int_A^B \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS}\right) ds,$$

dans laquelle M, N, T représentent les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants produits par le couple C.

Digitized by Google

§ 6. — Déplacement d'un point quelconque d'une poutre soumise en un de ses points à l'action d'une force extérieure. — Premier théorème de réciprocité.

Considérons d'abord deux forces appliquées en deux points (1) et (2) et dont les intensités, infiniment petites au début, croissent jusqu'à des valeurs finales données. Soient, à un instant déterminé, (1′), (2′), les positions des points (1) et (2); F_1, F_2, les valeurs correspondantes des deux forces *(fig. 4)*. Le déplacement (1) (1′) est la résultante des déplacements que prendrait le point (1) si les forces F_1 et F_2 agissaient successivement sur la poutre (principe de la superposition des effets élastiques); la projection (1) (1″) de ce chemin est donc la somme algébrique des projections de ces mêmes déplacements. D'ailleurs, ces dernières projections sont proportionnelles aux intensités F_1 et F_2 des forces à l'instant considéré. On peut donc poser :

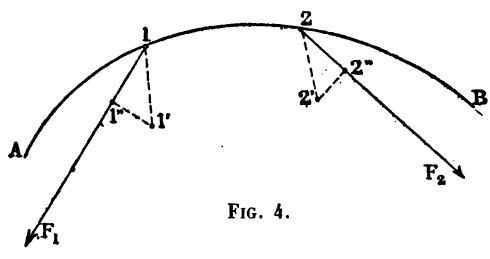


FIG. 4.

$$(a) \qquad (1.1'') = \lambda_1^1 F_1 + \lambda_1^2 F_2,$$

où λ_1^1, λ_1^2 sont des coefficients ayant les significations suivantes :

λ_1^1 est le déplacement qu'une force égale à l'unité, de même direction et de même sens que F_1, imprimerait à son point d'application (1), ce déplacement étant estimé suivant la direction même de cette force.

λ_1^2 est le déplacement qu'une force égale à l'unité, appliquée au point (2) et ayant même direction et même sens que F_2, imprimerait au point (1) de la poutre, ce déplacement étant estimé suivant la direction de la force F_1.

Il est bien entendu que les déplacements λ_1^1, λ_1^2 sont comptés positivement s'ils sont de même sens que F_1, et négativement dans le cas contraire.

Digitized by Google

Si on désigne par λ_2^1, λ_2^2, des coefficients (*) de même nature relatifs au point (2), on peut poser de même que précédemment :

$$(b) \qquad (2.2'') = \lambda_2^1 F_1 + \lambda_2^2 F_2.$$

Les deux relations (a) et (b) s'appliquent à tout instant de la déformation.

Les travaux élémentaires produits par les forces F_1 et F_2, lorsquelles s'accroissent de leurs différentielles dF_1, dF_2, et que par suite les déplacements projetés $(1.1'')$, $(2.2'')$ s'accroissent également de leurs différentielles $d(1.1'')$, $d(2.2'')$, ont pour expressions, aux infiniment petits du second ordre près :

$$F_1\, d\,(1.1'') = F_1\,(\lambda_1^1\ dF_1 + \lambda_1^2\ dF_2) = \lambda_1^1\ F_1\, dF_1 + \lambda_1^2\ F_1\, dF_2.$$

$$F_2\, d\,(2.2'') = F_2\,(\lambda_2^1\ dF_1 + \lambda_2\ dF_2) = \lambda_2^1\ F_2\, dF_1 + \lambda_2^2\ F_2\, dF_2.$$

Le travail total accompli pendant toute la durée de la déformation, c'est-à-dire depuis l'instant où les forces partent d'une valeur initiale infiniment petite jusqu'à celui où elles atteignent les valeurs finales F_1 et F_2, est l'intégrale de la somme des travaux élémentaires, prise entre les limites $F_1 = F_2 = 0$ et $F_1 = F_1$, $F_2 = F_2$; ou :

$$\mathfrak{T} = \int_0^{F_1} \lambda_1^1 F_1\, dF_1 + \int_0^{F_2} \lambda_2^2 F_2\, dF_2 + \int_{0,0}^{F_1,\,F_2} \lambda_1^2 F_1\, dF_2 + \int_{0,0}^{F_1,\,F_2} \lambda_2^1 F_2\, dF_1$$

$$= \frac{1}{2}\lambda_1^1 F_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_2^2 F_2^2 + \lambda_1^2 \int_{0,0}^{F_1,\,F_2} F_1\, dF_2 + \lambda_2^1 \int_{0,0}^{F_1,\,F_2} F_2\, dF_1.$$

L'intégration par partie donne :

$$\int F_2\, dF_1 = F_1 F_2 - \int F_1\, dF_2.$$

Substituant dans l'expression de $\mathfrak{T}$:

$$(c) \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{2}\lambda_1^1 F_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_2^2 F_2^2 + \lambda_2^1 F_1 F_2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^1) \int_0^{F_1,F_2} F_1\, dF_2.$$

(*) Le coefficient λ porte toujours en indice le numéro ou la lettre qui désigne le point dont il représente le déplacement, et, en exposant, le numéro ou la lettre qui désigne le point d'application de la force d'intensité 1 produisant ce déplacement.

Digitized by Google

Or, le travail des forces extérieures est également donné par la formule (1) :

$$(1) \qquad \mathfrak{T} = \frac{1}{2} \int_A^B \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS} \right) ds,$$

dans laquelle M, N, T sont les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants développés par les forces F_1 et F_2 agissant simultanément.

Ce travail est donc indépendant de la loi de variation des forces extérieures pendant la déformation, c'est-à-dire de la manière dont ces forces sont passées de leurs valeurs initiales infiniment petites à leurs valeurs finales F_1 et F_2. Or l'intégrale que renferme encore la formule (*c*) dépend nécessairement de cette loi de variation; il faut donc que cette intégrale disparaisse, — ce qui nécessite :

$$(d) \qquad (\lambda_1^2 - \lambda_2^1) = 0, \text{ ou } \lambda_1^2 = \lambda_2^1.$$

En se rappelant ce que représentent λ_1^2 et λ_2^1, on peut traduire cette égalité comme suit :

PREMIER THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ. — *Qu'une poutre soit, ou non, assujettie à des liaisons surabondantes, si une force égale à l'unité, appliquée en un point* (1), *suivant une direction* F_1, *imprime à un point* (2) *un déplacement dont la projection sur une direction* F_2 *a une valeur de* λ_2^1, *réciproquement, une force égale à l'unité, appliquée au point* (2), *suivant la direction* F_2, *imprime au point* (1) *un déplacement dont la projection* λ_1^2 *sur* F_1 *est égale à* λ_2^1.

Les trois relations (*c*), (1) et (*d*) permettent d'écrire :

$$(e) \qquad \frac{1}{2}\lambda_1^1 F_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_2^2 F_2^2 + \lambda_2^1 F_1 F_2 = \frac{1}{2} \int_A^B \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS} \right) ds.$$

Cela posé, soient M_1, N_1, T_1, les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants que produirait la force F_1 agissant seule; M_2, N_2, T_2, les mêmes éléments correspondant à la force F_2; on a :

$$(f) \qquad M = M_1 + M_2 \; ; \; N = N_1 + N_2 \; ; \; T = T_1 + T_2.$$

Digitized by Google

De plus, la formule (2) du § 4 donne :

$$(g) \qquad \frac{1}{2}\lambda_1^1 F_1^2 = \frac{1}{2}\int_A^B \left(\frac{M_1^2}{EI} + \frac{N_1^2}{ES} + \frac{T_1^2}{GS}\right) ds;$$

$$(h) \qquad \frac{1}{2}\lambda_2^2 F_2^2 = \frac{1}{2}\int_A^B \left(\frac{M_2^2}{EI} + \frac{N_2^2}{ES} + \frac{T_2^2}{GS}\right) ds.$$

Effectuant dans l'équation (*e*) les substitutions qu'autorisent les formules *(f)*, *(g)*, *(h)*, il vient, après réductions :

$$\lambda_2^1 F_1 F_2 = \int_A^B \left(\frac{M_1 M_2}{EI} + \frac{N_1 N_2}{ES} + \frac{T_1 T_2}{GS}\right) ds.$$

Dans cette relation, faisons $F_2 = 1$; soient μ, ν, θ, les valeurs que prennent alors M_2, N_2, T_2 ; nous obtenons :

$$(4) \qquad \lambda_2^1 F_1 = \int_A^B \left(\frac{M_1 \mu}{EI} + \frac{N_1 \nu}{ES} + \frac{T_1 \theta}{GS}\right) ds.$$

Or, $\lambda_2^1 F_1$ est la projection sur la direction F_2 du déplacement que prend le point (2) lorsque la force F_1 agit seule sur la poutre, ; c'est la quantité cherchée que nous représenterons par l_2^1 ; d'où :

$$(4\ bis) \qquad l_2^1 = \int_A^B \left(\frac{M_1 \mu}{EI} + \frac{N_1 \nu}{ES} + \frac{T_1 \theta}{GS}\right) ds.$$

Cette formule exprime que, pour calculer le déplacement suivant une direction donnée, d'un point quelconque d'une poutre déformée par une force F_1, on devra d'abord déterminer les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants M_1, N_1, T_1, produits en chaque point de la poutre par la force F_1 ; puis appliquer au point dont on veut connaître le déplacement une force *auxiliaire* égale à l'unité et ayant la direction suivant laquelle on se propose d'évaluer le déplacement ; calculer ensuite, en chaque point de la poutre, les moment fléchissant, tension longitudinale

Digitized by Google

et effort tranchant *auxiliaires* μ, ν, θ, correspondant à cette force; enfin, former l'intégrale indiquée ci-dessus, qu'on étendra d'une extrémité à l'autre de la poutre.

§ 7. — Déplacement d'un point quelconque d'une poutre soumise à l'action d'un couple agissant sur une section donnée. — Second théorème de réciprocité.

Soient D_1 la section d'application du couple *(fig. 5)*, et (2) le point dont nous nous proposons d'évaluer le déplacement en pro-

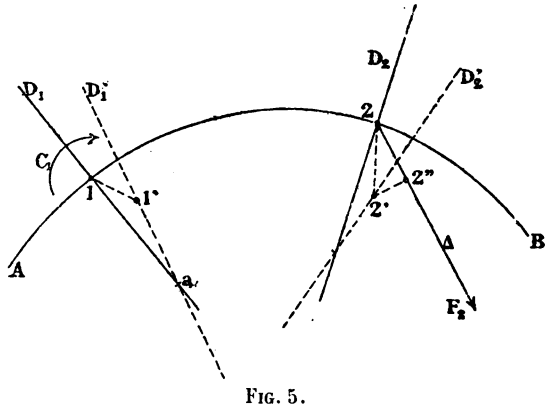


FIG. 5.

jection sur une direction arbitrairement choisie Δ. Pour y parvenir, appliquons au point (2) une force ayant la direction Δ, et le sens suivant lequel les déplacements projetés sur Δ seront comptés positivement.

Sous l'action du couple et de la force ainsi définis, que nous supposerons agir avec des intensités allant en croissant depuis des valeurs initiales zéro, jusqu'à des valeurs données, les points (1) et (2) et les sections correspondantes se déplacent.

Soient, à un instant quelconque de la déformation, C_1 l'intensité du couple, F_2 celle de la force, (1') et (2') les positions des points (1) et (2), D_1', D_2' celles des sections D_1 et D_2.

Le déplacement linéaire du point (2) et le déplacement angulaire de la section D_1 sont les résultantes des déplacements que prendraient respectivement ce point et cette section si le couple C_1 et la force F_2 agissaient successivement sur la poutre. (Principe de la superposition des effets élastiques.) Ces derniers déplace-

Digitized by Google

ments sont proportionnels aux intensités des efforts, — forces ou couples,—qui les produisent. On peut donc écrire à l'instant considéré :

$$(a) \qquad (2.2'') = \lambda_2^1 C_1 + \lambda_2^2 F_2,$$

$$(b) \qquad D_1 a D_1' = \gamma_1^1 C_1 + \gamma_1^2 F_2,$$

les coefficients λ et γ ayant les significations suivantes :

λ_2^1 est le déplacement, en projection sur la direction Δ, qu'un couple égal à l'unité, appliqué en D_1, imprimerait au point (2) ;

λ_2^2 est le déplacement de même nature qu'imprimerait au même point, une force égale à l'unité, appliquée en (2) et ayant la direction de Δ, ou, ce qui est la même chose, de F_2 ;

γ_1^1 est le déplacement angulaire qu'un couple égal à l'unité, appliqué à la section D_1, imprimerait à cette même section ;

γ_1^2 est le déplacement de même nature qu'imprimerait à la même section une force égale à l'unité, ayant la direction de Δ et appliquée en (2).

Les deux relations précédentes s'appliquent à tout instant de la déformation. Les travaux élémentaires produits par le couple et la force, lorsqu'ils passent des valeurs C_1 et F_2 à celles $C_1 + dC_1$, $F_2 + dF_2$, ont pour expressions :

$$F_2\, d(2.2'') = \lambda_2^1 F_2\, dC_1 + \lambda_2^2 F_2\, dF_2,$$

$$C_1\, d\left(D_1 a D_1'\right) = \gamma_1^1 C_1\, dC_1 + \gamma_1^2 C_1\, dF_2.$$

Le travail total accompli pendant la durée de la déformation, depuis l'instant où le couple et la force ont des intensités nulles jusqu'à l'instant où ils atteignent respectivement les valeurs finales C_1 et F_2, est l'intégrale de la somme des travaux élémentaires prise entre les limites $C_1 = F_2 = 0$ et $C_1 = C_1$, $F_2 = F_2$, ou :

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\lambda_2^2 F_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_1^1 C_1^2 + \lambda_2^1 \int_{0,0}^{C_1,\, F_2} F_2\, dC_1 + \gamma_1^2 \int_{0,0}^{C_1,\, F_2} C_1\, dF_2.$$

L'intégration par partie donne :

$$\int F_2\, dC_1 = C_1 F_2 - \int C_1\, dF_2.$$

Digitized by Google

D'où, en substituant :

$$(c)\quad \mathfrak{C} = \frac{1}{2}\lambda_2^2 F_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_1^1 C_1^2 + \lambda_2^1 C_1 F_2 + \left(\gamma_1^2 - \lambda_2^1\right)\int_{0,0}^{C_1,\,F_2} C_1\,dF_2.$$

Or, le travail des forces extérieures est également donné par la formule (1) :

$$(1)\qquad \mathfrak{C} = \frac{1}{2}\int_A^B \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS}\right) ds,$$

dans laquelle M, N, T, sont les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants développés par le couple C_1 et la force F_2 agissant simultanément.

Ce travail est donc indépendant de la loi suivant laquelle les efforts C_1 et F_2 ont varié pendant la déformation, depuis leurs valeurs initiales zéro, jusqu'à leurs valeurs finales C_1 et F_2. Or, l'intégrale que renferme encore la formule (*c*) dépend nécessairement de cette loi de variation ; il faut donc que cette intégrale disparaisse ; — ce qui nécessite :

$$(d)\qquad \gamma_1^2 = \lambda_2^1.$$

Cette égalité se traduit immédiatement comme suit :

SECOND THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ. — *Qu'une poutre soit, ou non, assujettie à des liaisons surabondantes, si un couple égale à l'unité, appliqué à une section D_1 imprime à un point* (2) *un déplacement linéaire dont la projection sur une direction* Δ *a une valeur* λ_2^1, *réciproquement, une force égale à l'unité, appliquée au point* (2) *suivant la direction* Δ, *imprime à la section D_1 un déplacement angulaire* (*) γ_1^2, *précisément égal à* λ_2^1.

Les trois relations (*c*), (1) et (*d*) permettent d'écrire :

$$(e)\quad \frac{1}{2}\lambda_2^2 F_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_1^1 C_1^2 + \lambda_2^1 C_1 F_2 = \frac{1}{2}\int_A^B \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS}\right) ds.$$

(*) Il est bien entendu que les déplacements angulaires sont mesurés sur l'arc de cercle du rayon 1 ; ce sont donc des *longueurs*.

Digitized by Google

Cela posé, soient M_1, N_1, T_1, les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants que produirait le couple C_1 agissant seul; M_2, N_2, T_2, les éléments similaires correspondant à la force F_2; on a :

$$(f) \qquad M = M_1 + M_2 ; \; N = N_1 + N_2 ; \; T = T_1 + T_2.$$

De plus les formules (2) du § 4 et (3) du § 5 donnent :

$$(g) \qquad \frac{1}{2}\lambda_2^2 F_2^2 = \frac{1}{2}\int_A^B \left(\frac{M_2^2}{EI} + \frac{N_2^2}{ES} + \frac{T_2^2}{GS}\right) ds ;$$

$$(h) \qquad \frac{1}{2}\gamma_1^1 C_1^2 = \frac{1}{2}\int_A^B \left(\frac{M_1^2}{EI} + \frac{N_1^2}{ES} + \frac{T_1^2}{GS}\right) ds.$$

Effectuant dans la formule (*e*) les substitutions qu'autorisent les relations (*f*), (*g*), (*h*), il vient, après réductions :

$$(k) \qquad \lambda_2^1 C_1 F_2 = \int_A^B \left(\frac{M_1 M_2}{EI} + \frac{N_1 N_2}{ES} + \frac{T_1 T_2}{GS}\right) ds.$$

Dans cette équation, faisons $F_2 = 1$; soient μ, ν, θ, les valeurs que prennent alors M_2, N_2, T_2 ; nous obtenons ;

$$(5) \qquad \lambda_2^1 C_1 = \int_A^B \left(\frac{M_1 \mu}{EI} + \frac{N_1 \nu}{ES} + \frac{T_1 \theta}{GS}\right) ds.$$

Or, $\lambda_2^1 C_1$ est la projection, sur la direction Δ, du déplacement linéaire imprimé au point (2) par le couple C_1 agissant seul sur la section D_1 ; c'est la quantité cherchée, que nous représenterons par l_2^1; d'où :

$$(5\,bis) \qquad l_2^1 = \int_A^B \left(\frac{M_1 \mu}{EI} + \frac{N_1 \nu}{ES} + \frac{T_1 \theta}{GS}\right) ds.$$

§ 8.

Les formules (4 *bis*) et (5 *bis*) expriment que, pour calculer le déplacement suivant une direction donnée Δ, d'un point quel-

Digitized by Google

conque d'une poutre déformée, soit par une force F_1, soit par un couple C_1, appliqués à un point ou à une section quelconque, on devra d'abord déterminer les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants produits en chaque point de la ligne moyenne soit par la force F_1, soit par le couple C_1, puis appliquer au point dont on cherche le déplacement, une force *auxiliaire* égale à l'unité, dirigée suivant Δ, et évaluer, pour chaque point de la ligne moyenne, les moment fléchissant, tension longitudinale et effort tranchant *auxiliaires*, correspondant à cette force, et enfin former les intégrales indiquées par les formules dont il s'agit.

§ 9. — PREMIÈRE FORMULE GÉNÉRALE. — **Déplacement d'un point quelconque d'une poutre soumise à l'action simultanée de plusieurs efforts extérieurs, — forces ou couples.**

Soient F_1, C_2, C_3, F_4,..... les forces et les couples agissant sur la poutre; $(M_1, N_1, T_1,)$, (M_2, N_2, T_2), (M_3, N_3, T_3), (M_4, N_4, T_4), etc... les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants produits en un point quelconque de la poutre par chacun de ces efforts.

Le déplacement total, suivant une direction arbitrairement choisie, d'un point donné de la poutre est exprimé, en vertu des équations (*4 bis*) et (*5 bis*) et du principe de superposition, par la formule :

$$l = \int_A^B \left(\frac{M_1\mu}{EI} + \frac{N_1\nu}{ES} + \frac{N_1\theta}{GS}\right) ds + \int_A^B \left(\frac{M_2\mu}{EI} + \frac{N_2\nu}{ES} + \frac{T_2\theta}{GS}\right) ds + \ldots$$

$$= \int_A^B \left[\frac{(M_1 + M_2 + \ldots)\mu}{EI} + \frac{(N_1 + N_2 + \ldots)\nu}{ES} + \frac{(T_1 + T_2 + \ldots)\theta}{GS}\right] ds,$$

dans laquelle, ainsi qu'il a été dit plus haut, μ, ν, θ sont les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants auxiliaires correspondant à une force auxiliaire égale à l'unité, appliquée au point dont on cherche le déplacement et ayant la direction suivant laquelle on veut évaluer ce déplacement.

Si on désigne par M, N, T, les moments fléchissants, tensions

Digitized by Google

longitudinales et efforts tranchants produits par l'action simultanée des efforts F_1, C_2, C_3, F_4 ....., on a :
$M = M_1 + M_2 + \ldots\ldots$; $N = N_1 + N_2 + \ldots\ldots$; $T = T_1 + T_2 + \ldots\ldots$;
et l'expression du déplacement cherché devient :

$$(A) \qquad l = \int_A^B \left(\frac{M\mu}{EI} + \frac{N\nu}{ES} + \frac{T\theta}{GS}\right) ds.$$

C'est la première formule fondamentale que nous nous proposions d'établir.

§ 10. — Déplacement angulaire d'une section quelconque d'une poutre déformée par une force extérieure appliquée en un point donné.

Les formules (*d*) et (*k*) du § 7 donnent :

$$\gamma_1^2 C_1 F_2 = \int_A^B \left(\frac{M_1 M_2}{EI} + \frac{N_1 N_2}{ES} + \frac{T_1 T_2}{GS}\right) ds.$$

Si, dans cette relation, on fait $C_1 = 1$, et si l'on désigne par μ, ν, θ, les valeurs correspondantes que prennent M_1, N_1, T_1, on obtient :

$$(6) \qquad \gamma_1^2 F_2 = \int_A^B \left(\frac{M_2\mu}{EI} + \frac{N_2\nu}{ES} + \frac{T_2\theta}{GS}\right) ds.$$

Le produit $\gamma_1^2 F_2$ représente précisément l'angle g_1^2 dont on a tourné la section D_1 (*fig. 5*), pendant la déformation produite par la force F_2 appliquée au point (2) ; on a donc :

$$(6^{bis}) \qquad g_1^2 = \int_A^B \left(\frac{M_2\mu}{EI} + \frac{N_2\nu}{ES} + \frac{T_2\theta}{GS}\right) ds.$$

Digitized by Google

§ 11. — Déplacement angulaire d'une section quelconque d'une poutre déformée par un couple extérieur, appliqué à une section donnée. — Troisième théorème de réciprocité.

En répétant l'analyse suivie déjà deux fois (§§ 6 et 7), on arrive aisément aux formules ci-après :

$$(a) \qquad \gamma_2^1 = \gamma_1^2 ,$$

$$(b) \qquad \gamma_1^2 C_1 C_2 = \int_A \left(\frac{M_1 M_2}{EI} + \frac{N_1 N_2}{ES} + \frac{T_1 T_2}{GS} \right) ds,$$

dans lesquelles :

C_1 et C_2 sont deux couples respectivement appliqués aux sections D_1 et D_2 *(fig. 6)*;

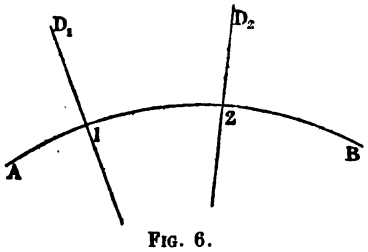


FIG. 6.

M_1, N_1, T_1 sont les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants développés par le couple C_1 agissant seul;

M_2, N_2, T_2, les mêmes éléments correspondant au couple C_2 ;

γ_2^1 le déplacement angulaire qu'un couple égal à l'unité, appliqué en D_1, imprimerait à la section D_2 ;

γ_1^2 le déplacement angulaire qu'un couple égal à l'unité, appliqué à la section D_2, imprimerait à la section D_1.

La formule (*a*) se traduit comme suit :

TROISIÈME THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ. — *Qu'une poutre soit, ou non, assujettie à des liaisons surabondantes, si un couple égal à l'unité, appliqué à une section D_1 imprime à une autre section D_2 un déplacement angulaire γ_2^1, réciproquement, un couple égal à l'unité, appliqué à la section D_2, imprime à la section D_1 un déplacement angulaire γ_1^2 précisément égal à γ_2^1.*

Quant à la formule (*b*), si on y fait $C_1 = 1$, et si on désigne

Digitized by Google

par μ, ν, θ, les valeurs que prennent alors M_1, N_1, T_1, on obtient :

$$(7) \qquad \gamma_1^2 C_2 = \int_A^B \left(\frac{M_2 \mu}{EI} + \frac{N_2 \nu}{ES} + \frac{T_2 \theta}{GS}\right) ds.$$

Or, le produit $\gamma_1^2 C_2$ représente l'angle g_1^2 dont a tourné la section D_1 pendant la déformation produite par le couple C_2; on a donc :

$$(7^{bis}) \qquad g_1^2 = \int_A^B \left(\frac{M_2 \mu}{EI} + \frac{N_2 \nu}{ES} + \frac{T_2 \theta}{GS}\right) ds .$$

§ 12. — SECONDE FORMULE GÉNÉRALE. — **Déplacement angulaire d'une section quelconque d'une poutre soumise à l'action simultanée de plusieurs efforts extérieurs, — forces ou couples.**

En partant des formules (6^{bis}) et (7^{bis}), et en appliquant de la même manière qu'au § 9, le principe de la superposition des effets élastiques, on trouve pour expression du déplacement angulaire (g) d'une section quelconque :

$$(B) \qquad g = \int_A^B \left(\frac{M \mu}{EI} + \frac{N \nu}{ES} + \frac{T \theta}{GS}\right) ds.$$

Dans cette formule, M, N, T, sont les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants développés par les efforts, — forces et couples, — simultanément appliqués ; μ, ν, θ, sont les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants produits par un *couple auxiliaire*, égal à l'unité, appliqué à la section dont on cherche le déplacement, et dans le sens positif dudit déplacement.

§ 13. — Sur l'application des formules générales aux pièces assujetties à des liaisons surabondantes.

Soit une pièce astreinte à des liaisons surabondantes et soumise à l'action de forces données. Proposons-nous de calculer, par

Digitized by Google

exemple, la projection l du déplacement d'un point D de cette pièce, sur une direction Δ arbitrairement choisie. Supposons que les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants M, N, T, soient connus.

Nous pouvons procéder de deux manières différentes:

1° Appliquer directement la formule générale (A) du § 9, ce qui nécessite la détermination préalable des termes μ, ν, θ, c'est-à-dire des moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants que développerait, dans la pièce considérée, une *force auxiliaire* égale à l'unité, appliquée en D et ayant la direction Δ; ces éléments dépendent de l'élasticité de la pièce et des liaisons surabondantes;

2° Rendre d'abord libre la pièce en remplaçant les liaisons surabondantes par des forces capables d'en tenir lieu, — ce qui ne change pas la valeur des termes M, N, T, — puis appliquer la formule (A) dans laquelle μ, ν, θ désignent alors les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants que produirait dans la pièce considérée, *dépouillée de ses liaisons surabondantes*, une *force auxiliaire* égale à l'unité, appliquée en D et ayant la direction Δ; ces éléments sont indépendants de l'élasticité de la pièce et des liaisons surabondantes; nous les représenterons par μ', ν', θ'.

Il suit de là que le déplacement cherché est exprimé indistinctement par l'une ou l'autre des formules suivantes:

$$\text{(A)} \qquad l = \int_A^B \left(\frac{M\,\mu}{EI} + \frac{N\,\nu}{ES} + \frac{T\,\theta}{GS} \right) ds \ ,$$

$$\text{et } (A_{bis}) \qquad l = \int_A^B \left(\frac{M\,\mu'}{EI} + \frac{N\,\nu'}{ES} + \frac{T\,\theta'}{GS} \right) ds \ ,$$

dans lesquelles M, N, T ont les mêmes valeurs, et où les quantités auxiliaires μ, ν, θ d'une part, μ', ν', θ' d'autre part, résultent: les premières, de l'application de la force auxiliaire définie plus haut, à la pièce donnée *astreinte à ses liaisons surabondantes;* les secondes, de l'application de la même force à la pièce donnée *dépouillée de ses liaisons surabondantes.*

Digitized by Google

Ce résultat, paradoxal au premier abord, s'explique aisém comme suit :

Exprimons les quantités *auxiliaires* μ, ν, θ, en fonction de μ', ν, θ'.

Commençons par le moment μ.

Soient $L_1, L_2, \ldots, L_n$, les points ou les sections de la pièce astreints aux liaisons surabondantes.

On sait qu'on peut toujours rendre libre la pièce par la suppression des liaisons surabondantes, à la condition d'appliquer aux points ou sections $L_1, L_2, \ldots L_n$, *des forces (ou des couples) de liaison*, ou *réactions*, s'opposant à tout déplacement de ces points ou sections, incompatible avec lesdites liaisons. Soient $f_1, f_2 \ldots f_n$, les valeurs des forces ou des couples de liaison développés par la *force auxiliaire*.

Dès lors, la pièce est libre sous l'action simultanée de la force auxiliaire et des forces de liaison $f_1, f_2 \ldots f_n$.

Chacune de ces forces, considérée comme agissant isolément, donne lieu, en tout point de la poutre rendue libre, à un moment fléchissant, savoir :

La *force auxiliaire* produit un moment qui n'est autre que celui désigné précédemment par μ'; les forces $f_1, f_2, \ldots f_n$, développent des moments que nous représenterons par $\mu_1 f_1, \mu_2 f_2, \ldots, \mu_n f_n$, — en désignant par $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, les moments fléchissants que produiraient respectivement des forces égales à l'unité, et ayant mêmes points d'application et mêmes directions et sens que $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Or, le moment total, produit par la *force auxiliaire* et les forces $f_1, f_2, \ldots, f_n$, agissant simultanément sur la poutre rendue libre, est égal au moment fléchissant produit par la force auxiliaire seule agissant sur la poutre astreinte aux liaisons surabondantes, moment que nous avons désigné par μ ; on a donc :

$$\mu = \mu' + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_n f_n \ ;$$

On établirait de même les deux relations de même forme suivantes, relatives aux tensions longitudinales et aux efforts tranchants :

$$\nu = \nu' + \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 + \ldots + \nu_n f_n \ ,$$
$$\theta = \theta' + \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 + \ldots + \theta_n f_n \ .$$

Digitized by Google

En substituant ces expressions de μ, ν, θ, dans la formule (A), il vient :

$$l = \int_A^B \left(\frac{M\mu}{EI} + \frac{N\nu}{ES} + \frac{T\theta}{GS}\right) ds = \int_A^B \left(\frac{M\mu'}{EI} + \frac{N\nu'}{ES} + \frac{T\theta'}{GS}\right) ds +$$

$$f_1 \int_A^B \left(\frac{M\mu_1}{EI} + \frac{N\nu_1}{ES} + \frac{T\theta_1}{GS}\right) ds + \ldots + f_n \int_A^B \left(\frac{M\mu_n}{EI} + \frac{N\nu_n}{ES} + \frac{T\theta_n}{GS}\right) ds.$$

M, N, T représentant les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants produits par les forces extérieures, en chaque point de la pièce *astreinte à ses liaisons surabondantes*, l'intégrale $\int_A^B \left(\frac{M\mu_1}{EI} + \frac{N\nu_1}{ES} + \frac{T\theta_1}{GS}\right) ds$ n'est autre chose que l'expression du déplacement que lesdites forces extérieures impriment au point ou à la section L_1, suivant la direction de f_1, et cela en vertu de la formule générale (A). Or, ce déplacement est nul en raison de la liaison même du point ou de la section L_1. Les intégrales suivantes sont nulles pour le même motif ; il vient donc finalement, les forces $f_1, f_2 \ldots f_n$ n'étant pas infinies :

$$l = \int_A^B \left(\frac{M\mu}{EI} + \frac{N\nu}{ES} + \frac{T\theta}{GS}\right) ds = \int_A^B \left(\frac{M\mu'}{EI} + \frac{N\nu'}{ES} + \frac{T\theta'}{GS}\right) ds ;$$

ce qui montre bien que l'on peut faire usage de la formule générale exprimant les déplacements linéaires, soit sous la forme (A), soit sous la forme (A *bis*).

Même démonstration, en ce qui concerne la formule générale (B) des déplacements angulaires.

REMARQUE IMPORTANTE. — Soit encore une pièce astreinte à des liaisons en nombre quelconque.

Nous venons d'établir que, pour le calcul des quantités auxiliaires μ, ν, θ, on pouvait considérer la pièce comme astreinte seulement aux liaisons indépendantes de l'élasticité.

Digitized by Google

Or il y a, en général, plusieurs manières différentes de ramener la pièce à cet état (*). A chacune d'elles répond évidemment un système particulier de valeurs de μ, ν, θ, et par suite une forme également particulière, soit de la formule (A), soit de la formule (B).

Ces formules renferment donc implicitement autant d'expressions différentes des déformations que les liaisons de la pièce peuvent former de groupes différents de liaisons indépendantes de l'élasticité.

Dans les applications, nous mettrons à profit cette remarque importante en choisissant, parmi les systèmes de liaisons indépendantes de l'élasticité, celui qui conduira aux calculs les plus simples.

§ 14. — Identité des formules générales (A) et (B).

Il faut remarquer que c'est par une formule unique (A) que sont exprimés les déplacements d'un point d'une poutre de forme quelconque, quelles que soient les directions arbitrairement choisies pour estimer ces déplacements.

Il y a plus, l'expression (B) du déplacement angulaire d'une section quelconque se présente sous la même forme. Toutefois, les termes μ, ν, θ ne paraissent pas, au premier abord, avoir la même signification dans les deux formules (A) et (B); dans la première, ils désignent les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants produits par une force auxiliaire égale à l'unité, appliquée au point dont on cherche le déplacement et ayant la direction et le sens suivant lesquels on veut estimer ce déplacement; dans la seconde, ils désignent les éléments de même nature, correspondant à un couple auxiliaire égal à l'unité, appliqué à la section dont on cherche le déplacement angulaire et ayant le sens considéré comme positif pour la mesure dudit déplacement.

(*) Soit, par exemple, un arc encastré à ses deux extrémités A et B.
On peut considérer comme indépendantes de l'élasticité les liaisons en vertu desquelles la section A est astreinte à rester fixe de position (système n° 2, § 2), et par suite comme surabondantes celles qui imposent la fixité de la section B.
On peut encore considérer comme indépendantes de l'élasticité les liaisons en vertu desquelles : 1° un point quelconque (1) de la section A est astreint à rester absolument fixe; 2° un point quelconque (2) de la section B est assujetti à demeurer sur une droite W (2) W' de direction arbitrairement choisie (système n° 1 - § 2); et par suite comme surabondantes les autres liaisons, qui imposent : 1° l'invariabilité de la situation angulaire des sections A et B, 2° la fixité de position du point (2) sur la droite WW'.

Digitized by Google

Mais, en se rappelant qu'un couple n'est autre chose qu'une force infiniment petite agissant suivant la droite à l'infini du plan de ce couple, on voit que les deux expressions (A) et (B) constituent en réalité une seule et unique formule.

§ 15. — Simplification des formules générales, dans le cas où l'on néglige les déformations de l'ordre de la tension longitudinale et de l'effort tranchant.

Dans cette hypothèse, le second et le troisième termes des formules (A) et (B) disparaissent et l'on obtient les deux expressions approchées suivantes :

$$(A_1) \qquad l = \int_A^B \frac{M\mu}{EI}\, ds,$$

$$(B_1) \qquad g = \int_A^B \frac{M\mu}{EI}\, ds,$$

dans lesquelles les lettres conservent les significations indiquées précédemment.

§ 16. — Corollaires des théorèmes de réciprocité.

On déduit immédiatement des deux premiers théorèmes de réciprocité les corollaires suivants :

COROLLAIRE DU PREMIER THÉORÈME. — *Qu'une poutre soit, ou non, astreinte à des liaisons surabondantes, si une force appliquée à un point* (1), *suivant une direction* Δ_1, *imprime à un point* (2) *un déplacement de direction* Δ_2, *une force appliquée au point* (2), *perpendiculairement à* Δ_2, *imprime au point* (1) *un déplacement perpendiculaire à la direction* Δ_1.

COROLLAIRE DU SECOND THÉORÈME. — *Qu'une poutre soit, ou non, astreinte à des liaisons surabondantes, si un couple appliqué à une section* D_1 *imprime à un point* (2) *un déplacement linéaire suivant une direction* Δ_2, *une force appliquée en* (2), *perpendiculairement à* Δ_2, *n'imprime aucun déplacement angulaire à la section* D_1.

Digitized by Google

CHAPITRE II

Extension des formules générales et des théorèmes de réciprocité aux pièces ayant pour ligne moyenne une courbe gauche et soumises à des forces quelconques (*).

§ 17. — Hypothèses et définitions.

Le solide, dont nous nous proposons d'étudier les déformations, a pour ligne moyenne une courbe gauche quelconque. Il est engendré par une figure plane, dont le centre de gravité décrit la courbe gauche et dont le plan est constamment normal à cette courbe ; cette figure peut, d'ailleurs, changer de forme et de dimensions pendant le mouvement, mais d'une manière continue.

Des forces quelconques sollicitent cette pièce et y déterminent des déformations et des efforts intérieurs.

Nous supposerons connues les formules exprimant les forces intérieures de flexion, de torsion, de tension et de cisaillement, en une section transversale quelconque, en fonction des forces extérieures agissant à droite de cette section.

Nous admettrons, comme précédemment, le principe de la superposition des effets élastiques des forces.

D'autre part, nous dirons encore que les *liaisons* auxquelles une pièce est astreinte sont *indépendantes de l'élasticité* lorsque les forces de liaison, ou réactions, correspondantes seront calculables par l'application directe des six conditions générales d'équilibre ; et nous appellerons toute liaison supplémentaire *surabondante* ou *dépendante de l'élasticité*.

On reconnaît facilement, par exemple, que les systèmes de liaisons suivants sont *indépendants de l'élasticité*.

1° Une *section* de la poutre est astreinte à tourner autour d'un axe fixe situé dans son plan, tandis qu'un autre point quelconque de la poutre est assujetti à demeurer sur un plan fixe.

2° Une section de la poutre est astreinte à conserver une position invariable.

(*) L'analyse à suivre pour établir les formules et les théorèmes relatifs aux déformations des pièces dont il s'agit étant identiquement celle exposée au chapitre I^er^, nous serons très brefs, nous bornant à indiquer les calculs nécessaires.

Digitized by Google

§ 18. — Travail accompli pendant la déformation.

En reprenant le raisonnement du § 3, on voit que la somme des travaux des forces extérieures et intérieures est nulle pour la durée de la déformation.

Calculons d'abord le travail de ces dernières.

Soient :

M N, P Q, deux sections infiniment voisines, normales en G et en G′ à la ligne moyenne *a b*, qui est une courbé gauche *(fig. 7)*.

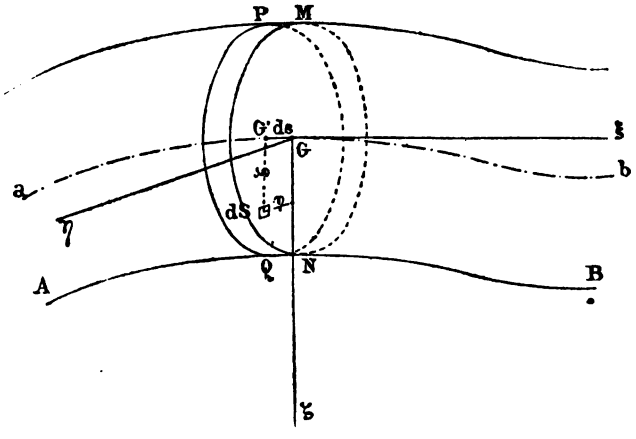


Fig. 7.

$G\xi$, la tangente à la courbe gauche.

$G\eta$, $G\zeta$, les axes principaux d'inertie de la section M N.

Les actions sur la portion de la pièce située à droite de la section M N peuvent être remplacées par leur résultante de translation appliquée en G et par un couple résultant dont l'axe passe par G ; soient N, T_η, T_ζ, les composantes de la résultante de translation suivant les directions normales $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$; soient M_ξ, M_η, M_ζ, les composantes du couple résultant suivant les mêmes axes.

Désignons enfin par R_ξ, R_η, R_ζ, les composantes de l'effort intérieur R rapporté à l'unité de surface, en un élément dS défini par les coordonnées η et ζ. On sait que ces trois composantes

Digitized by Google

sont liées aux quantités N, T_η, T_ζ, M_ξ, M_η, M_ζ, par les relations suivantes :

$$R_\xi = + \frac{\zeta M_\eta}{I_\eta} - \frac{\eta M_\zeta}{I_\zeta} - \frac{N}{S}$$

$$R_\eta = - \frac{\zeta M_\xi}{I_\xi} - \frac{T_\eta}{S}$$

$$R_\zeta = + \frac{\eta M_\xi}{I_\xi} - \frac{T_\zeta}{S}$$

dans lesquelles I_ξ, I_η, I_ζ, sont les moments d'inertie de la section par rapport aux trois axes rectangulaires $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$.

Si on désigne par *ds* l'épaisseur de la tranche infiniment mince M N P Q, et par E et G les coefficients d'élasticité dans le sens longitudinal et dans le sens transversal, le travail des forces intérieures pour la fibre de base *d*S et de longueur *ds* est :

$$\frac{1}{2}\frac{R_\xi^2}{E} dS\, ds + \frac{1}{2}\frac{R_\eta^2}{G} dS\, ds + \frac{1}{2}\frac{R_\zeta^2}{G} dS\, ds,$$

en vertu de la formule (*a*) du § 3.

Pour obtenir le travail produit dans toute la tranche M N P Q, il suffit de remplacer R_ξ, R_η, R_ζ par leurs valeurs indiquées plus haut, et d'intégrer la fonction obtenue, pour toute l'étendue de la section M N ; on trouve, en développant les carrés et groupant les termes :

$$\frac{1}{2} ds \int \left[\frac{(\eta^2 + \zeta^2) M_\xi^2}{G I_\xi^2} dS + \frac{\zeta^2 M_\eta^2}{E I_\eta^2} dS + \frac{\eta^2 M_\zeta^2}{E I_\zeta^2} dS \right.$$

$$+ \frac{N^2}{E S^2} dS + \frac{T_\eta^2}{G S^2} dS + \frac{T_\zeta^2}{G S^2} dS - 2 \frac{M_\xi T_\zeta}{G S I_\xi} \eta\, dS$$

$$\left. + 2 \frac{M_\xi T_\eta}{G S I_\xi} \zeta\, dS - 2 \frac{M_\eta N}{E S I_\eta} \zeta\, dS + 2 \frac{M_\zeta N}{E S I_\zeta} \eta\, dS - 2 \frac{M_\eta M_\zeta}{E I_\eta I_\zeta} \eta\zeta\, dS \right.$$

Les cinq derniers termes du développement sont nuls, car : $\int \eta\, dS = 0$, $\int \zeta\, dS = 0$, $\int \eta\, \zeta\, dS = 0$, puisque G est le centre de gravité de la section et que les axes des η et des ζ en sont les axes principaux d'inertie.

Digitized by Google

Quant aux six premiers termes, ils se simplifient en remarquant que :

$$\int dS = S, \quad \int (\eta^2 + \zeta^2)\, dS = I_\xi, \quad \int \eta^2\, dS = I_\zeta, \int \zeta^2\, dS = I_\eta.$$

L'expression du travail dans la tranche M N P Q se réduit à :

$$\frac{1}{2}\, ds \left[\frac{M^2_\xi}{G I_\xi} + \frac{M^2_\eta}{E I_\eta} + \frac{M^2_\zeta}{E I_\zeta} + \frac{N^2}{E S} + \frac{T^2_\eta}{G S} + \frac{T^2_\zeta}{G S}\right].$$

Et enfin le travail de déformation, ou des forces intérieures, est, pour toute la poutre, égal à l'intégrale de l'expression précédente, étendue d'une extrémité à l'autre de la poutre.

En désignant par $\mathfrak{T}$ le travail accompli par les forces extérieures, pendant la déformation, on peut donc écrire, en vertu de ce que nous avons dit au début de ce paragraphe, et en remarquant que le travail des forces intérieures est négatif :

$$(1') \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{2} \int_A^B \left(\frac{M^2_\xi}{G I_\xi} + \frac{M^2_\eta}{E I_\eta} + \frac{M^2_\zeta}{E I_\zeta} + \frac{N^2}{E S} + \frac{T^2_\eta}{G S} + \frac{T^2_\zeta}{G S}\right) ds.$$

§ 19. — Déplacement du point d'application d'une force extérieure, pendant la déformation.

Soit F la force extérieure appliquée à un point D, et λ la projection sur la direction de cette force, du déplacement qu'imprimerait au point D une force égale à l'unité et ayant même direction et même sens que F.

L'expression du travail de la force F conserve la forme indiquée au paragraphe 4, c'est-à-dire :

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\, \lambda\, F^2 ;$$

d'où, en vertu de (1') :

$$(2') \quad \lambda\, F^2 = \int_A^B \left(\frac{M^2_\xi}{G I_\xi} + \frac{M^2_\eta}{E I_\eta} + \frac{M^2_\zeta}{E I_\zeta} + \frac{N^2}{E S} + \frac{T^2_\eta}{G S} + \frac{T^2_\zeta}{G S}\right) ds.$$

Digitized by Google

Et par suite le déplacement cherché $l = \lambda F$ est exprimé par la formule :

$$(2'_1) \qquad l = \frac{1}{F} \int_A^B \left(\frac{M^2_\xi}{GI_\xi} + \frac{M^2_\eta}{EI_\eta} + \frac{M^2_\zeta}{EI_\zeta} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2_\eta}{GS} + \frac{T^2_\zeta}{GS} \right) ds,$$

dans laquelle M_ξ, M_η, ..., T_ζ sont les moments, tensions et efforts tranchants produits dans les diverses sections de la poutre par la force F.

§ 20. — Déplacement angulaire d'une section à laquelle est appliqué un couple extérieur quelconque.

Comme il est d'usage, nous représenterons le couple et le déplacement angulaire, ou rotation, par leurs axes.

Le couple appliqué à la section D *(fig. 8)* a d'abord une intensité nulle et croît progressivement jusqu'à une valeur finale donnée; en même temps, la rotation croît aussi, et, en vertu du principe de superposition :

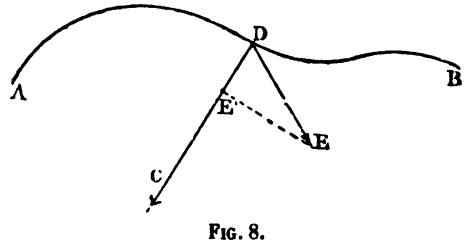


FIG. 8.

1° L'axe de cette rotation conserve constamment la même direction;

2° A chaque instant de la déformation, la valeur de la rotation, c'est-à-dire la longueur D E de son axe représentatif, est proportionnelle à l'intensité C du couple au même instant; il en est de même, par suite, de la projection D E′ de cette rotation sur l'axe du couple (*), — en sorte qu'on peut poser :

$$DE' = \gamma C ,$$

γ étant la projection sur l'axe du couple, de la rotation qu'imprimerait à la section D un couple de même direction et de même sens que C, mais d'intensité 1.

Cela posé, on sait que le travail d'un couple, pour un dépla-

(*) Ainsi qu'il est d'usage, nous entendons par l'expression *projection d'une rotation*, la projection de la grandeur de cette rotation *préalablement reportée sur son axe représentatif*.

Digitized by Google

cement de rotation, est égal au produit du couple par la projection de l'axe de la rotation sur l'axe du couple.

Par conséquent, lorsque, à partir de l'instant considéré, C s'accroît de dC, et que par suite la rotation projetée $DE' = \gamma C$ s'accroît de $d(DE') = d(\gamma C) = \gamma\, dC$, le travail élémentaire accompli a pour expression :

$$C\, d(\gamma C) = \gamma\, C\, dC.$$

Le travail total du couple C, depuis l'instant où il commence à agir, en partant de la valeur zéro, jusqu'à l'instant où il atteint sa valeur finale C, est donné par la formule :

$$\mathfrak{T} = \int_0^C \gamma C\, dC = \frac{1}{2}\, \gamma\, C^2 \;;$$

d'où, en vertu de l'équation (1′) (§ 18) :

$$(3') \qquad \gamma\, C = \int_A^B \left(\frac{M^2_\xi}{G I_\xi} + \frac{M^2_\eta}{E I_\eta} + \frac{M^2_\zeta}{E I_\zeta} + \frac{N^2}{E S} + \frac{T^2_\eta}{G S} + \frac{T^2_\zeta}{G S} \right) ds.$$

Or $\gamma\, C$ est égal à la projection de l'axe de la rotation totale de la section D sur l'axe du couple C qui produit cette rotation; nous représenterons cette projection par g et nous aurons :

$$(3'_1) \qquad g = \frac{1}{C} \int_A^B \left(\frac{M^2_\xi}{G I_\xi} + \frac{M^2_\eta}{E I_\eta} + \frac{M^2_\zeta}{E I_\zeta} + \frac{N^2}{E S} + \frac{T^2_\eta}{G S} + \frac{T^2_\zeta}{G S} \right) ds;$$

dans cette expression $M_\xi, \ldots\ldots T_\zeta$, sont les moments, tensions et efforts tranchants produits dans les diverses sections de la poutre par le couple C.

§ 21. — Théorèmes de réciprocité. — Formules générales.

La marche à suivre pour établir les théorèmes et les formules générales applicables aux pièces dont la ligne moyenne est gauche, est identiquement celle exposée aux paragraphes 6 et suivants pour les pièces dont la ligne moyenne est plane. Afin d'abréger, nous laisserons au lecteur le soin de reprendre les calculs.

Digitized by Google

La démonstration que nous avons donnée des théorèmes de réciprocité pour les pièces planes est fondée seulement sur le principe de la superposition des effets élastiques des forces, et sur ce que le travail des forces intérieures, pendant la déformation complète, ne dépend que des valeurs finales des forces extérieures.

Ces deux principes régissent encore les pièces qui nous occupent : le premier est effectivement bien connu; quant au second, il résulte immédiatement de la relation (1') du § 18.

On comprend donc, sans qu'il soit nécessaire d'en reprendre la démonstration, que les théorèmes de réciprocité s'étendent aux pièces dont la ligne moyenne est gauche.

Ces théorèmes, ainsi généralisés, peuvent s'énoncer comme suit :

Qu'une pièce, ayant pour ligne moyenne une courbe plane ou une courbe gauche, soit, ou non, astreinte à des liaisons surabondantes :

1° Si une force égale à l'unité, appliquée à un point (1) suivant une direction Δ_1, *imprime à un point (2) un déplacement dont la projection sur une direction* Δ_2 *a une valeur* λ_2^1, *réciproquement, une force égale à l'unité, appliquée au point (2) suivant la direction* Δ_2, *imprime au point (1) un déplacement dont la projection* λ_1^2 *sur* Δ_1 *est égale à* λ_2^1.

2° Si un couple égal à l'unité, et dont l'axe a une direction Δ_1, *appliqué à une section* D_1, *imprime à un point (2) un déplacement linéaire dont la projection sur une direction* Δ_2 *a une valeur* λ_2^1, *réciproquement, une force égale à l'unité, appliquée au point (2) suivant la direction* Δ_2, *imprime à la section* D_1 *un déplacement de rotation qui, reporté sur l'axe représentatif, a pour projection* γ_1^2 *sur* Δ_1 *la même valeur* λ_2^1.

3° Si un couple égal à l'unité et dont l'axe a une direction Δ_1, *appliqué à une section* D_1, *imprime à une autre section* D_2 *un déplacement de rotation qui, reporté sur l'axe représentatif, a pour projection sur une direction* Δ_2, *une valeur* γ_2^1, *réciproquement, un couple égal à l'unité, appliqué à la section* D_2 *et dont l'axe est dirigé suivant* Δ_2, *imprime à la section* D_1 *un déplacement de rotation qui, reporté sur l'axe représentatif, a pour projection* γ_1^2 *sur* Δ_1 *la même valeur* γ_2^1.

Digitized by Google

En ce qui concerne les formules générales, on conçoit qu'elles doivent se présenter sous la même forme que celles du chapitre I; il suffit, à cet effet, de comparer les relations (1) (2) et (3) des §§ 3, 4 et 5 à celles de mêmes numéros des §§ 18, 19 et 20. On trouve d'ailleurs, en effectuant les calculs, les deux formules générales suivantes exprimant les déplacements linéaires et angulaires :

$$(A') \quad l = \int_A^B \left(\frac{M_\xi \mu_\xi}{G I_\xi} + \frac{M_\eta \mu_\eta}{E I_\eta} + \frac{M_\zeta \mu_\zeta}{E I_\zeta} + \frac{N \nu}{E S} + \frac{T_\eta \theta_\eta}{G S} + \frac{T_\zeta \theta_\zeta}{G S} \right) ds.$$

$$(B') \quad g = \int_A^B \left(\frac{M_\xi \mu_\xi}{G I_\xi} + \frac{M_\eta \mu_\eta}{E I_\eta} + \frac{M_\zeta \mu_\zeta}{E I_\zeta} + \frac{N \nu}{E S} + \frac{T_\eta \theta_\eta}{G S} + \frac{T_\zeta \theta_\zeta}{G S} \right) ds.$$

Dans ces formules, $M_\xi \ldots, N \ldots, T_\zeta$ représentent les moments, tensions longitudinales et efforts tranchants développés par les efforts, — forces ou couples — agissant sur la poutre :

$\mu_\xi, \ldots, \nu, \ldots, \theta_\zeta$ désignent :

1° Dans la formule (A'), les moments, tensions longitudinales et efforts tranchants produits par une *force auxiliaire* égale à l'unité, appliquée au point dont on cherche le déplacement et ayant la direction suivant laquelle on veut évaluer ce déplacement;

2° Dans la formule (B'), les éléments de même nature produits par un *couple auxiliaire*, appliqué à la section dont on cherche le déplacement de rotation et ayant pour direction de son axe la direction suivant laquelle on veut évaluer la rotation (*).

§ 22. — Remarques sur les formules générales.

Les indications données au § 13, relativement à l'emploi des formules (A) et (B) pour le calcul des déformations des pièces astreintes à des liaisons surabondantes, subsistent encore ici; c'est-à-dire que pour la détermination des termes auxiliaires $\mu_\xi \ldots$, $\nu \ldots$, θ_ζ, on pourra faire abstraction des liaisons surabondantes et considérer par conséquent la pièce comme absolument libre;

(*) L'expression abréviative *évaluer une rotation suivant une direction* signifie *déterminer la projection de l'axe de la rotation sur cette direction.*

Digitized by Google

il en résultera une grande simplification, puisque ces termes deviendront indépendants de l'élasticité.

Il est essentiel de remarquer, comme au § 13, que *les formules* (A′) *et* (B′) *renferment implicitement autant d'expressions différentes des déformations que les liaisons de la pièce peuvent former de groupes différents de liaisons indépendantes de l'élasticité.*

L'observation du § 14, relative à l'identité des formules générales (A) et (B), reste exacte pour celles (A′) et (B′) du § 21.

§ 23. — Simplification des formules générales dans le cas où l'on néglige les déformations de l'ordre de la tension longitudinale et de l'effort tranchant.

Dans cette hypothèse, les trois derniers termes des formules (A′) et (B′) disparaissent et on obtient les deux expression approchées suivantes :

$$(A_1') \qquad l = \int_A^B \left(\frac{M_\xi \mu_\xi}{G I_\xi} + \frac{M_\eta \mu_\eta}{E I_\eta} + \frac{M_\zeta \mu_\zeta}{E I_\zeta} \right) ds,$$

$$(B_1) \qquad g = \int_A^B \left(\frac{M_\xi \mu_\xi}{G I_\xi} + \frac{M_\eta \mu_\eta}{E I_\eta} + \frac{M_\zeta \mu_\zeta}{E I_\zeta} \right) ds,$$

dans chacune desquelles les lettres conservent les significations indiquées précédemment.

§ 24. — Corollaires des théorèmes de réciprocité.

On déduit immédiatement des théorèmes de réciprocité les corollaires suivants :

Qu'une pièce, ayant pour ligne moyenne une courbe plane ou une courbe gauche, soit, ou non, astreinte à des liaisons surabondantes ;

1° *Si une force appliquée à un point* (1), *suivant une direction* Δ_1, *imprime à un point* (2) *un déplacement de direction* Δ_2, *une force appliquée en* (2) *perpendiculairement à* Δ_2, *imprime au point* (1) *un déplacement perpendiculaire à* Δ_1.

2° *Si un couple appliqué à une section* D_1, *et dont l'axe a une direc-*

Digitized by Google

tion Δ_1, imprime à un point (2) un déplacement linéaire de direction Δ_2, une force appliquée au point (2), perpendiculairement à Δ_2, imprime à la section D_1 un déplacement de rotation dont l'axe est perpendiculaire à Δ_1.

3° Si un couple appliqué à une section D_1, et dont l'axe a une direction Δ_1, imprime à une section D_2 un déplacement de rotation dont l'axe a une direction Δ_2, un couple appliqué à la section D_2, et dont l'axe est perpendiculaire à Δ_2, imprime à la section D_1 un déplacement de rotation dont l'axe est perpendiculaire à Δ_1.

CHAPITRE III

Extension des formules générales et des théorèmes de réciprocité aux constructions élastiques.

§ 25. — Hypothèses et définitions.

Les constructions que nous envisageons sont supposées constituées par des pièces de la nature de celles étudiées aux chapitres Ier et II, réunies entre elles, soit par des *assemblages*, soit par des *articulations* ou des *rotules*. Elles sont soumises à des forces extérieures quelconques.

Dans le cas où les moments, les tensions longitudinales et les efforts tranchants produits par ces forces, dans les sections des différentes pièces, pourront être calculés directement, sans faire intervenir l'élasticité, nous dirons que la construction n'est astreinte qu'à des liaisons *indépendantes de l'élasticité*.

Dans le cas contraire, nous appellerons *surabondantes* toutes les liaisons qu'il faudrait supprimer pour rentrer dans la première hypothèse, c'est-à-dire pour que les liaisons restantes soient indépendantes de l'élasticité.

Les liaisons surabondantes peuvent être, soit *extérieures*, soit *intérieures*.

Elles sont *extérieures*, lorsqu'elles ont lieu entre des points, lignes, ou sections, appartenant à des pièces de la construction et des points, lignes, ou surfaces, extérieurs à la construction pro-

Digitized by Google

prement dite. Elles sont réalisées au moyen de rotules, d'appuis, d'encastrements, etc.

Elles sont *intérieures*, lorsqu'elles ont lieu entre des points, lignes ou sections appartenant à certaines pièces de la construction et des points, lignes ou sections appartenant à d'autres pièces de la construction.

Par exemple : Étant donnée une construction astreinte seulement à des liaisons indépendantes de l'élasticité et comportant une articulation à l'intersection O de trois de ses pièces O A, O B, O C *(fig. 9)*, si on remplace cette articulation par un *assemblage*, celui-ci impose entre ces trois pièces de nouvelles liaisons qui sont à la fois *intérieures* et *surabondantes*.

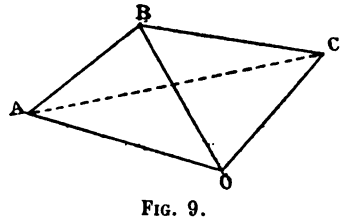


FIG. 9.

Par exemple encore : Si, dans la même construction, on ajoute une barre supplémentaire A C, cette pièce établit entre les points A et C de nouvelles liaisons qui sont à la fois *intérieures* et *surabondantes*. On dit, en outre, dans ce cas, que la pièce A C est elle-même *surabondante*.

Nous supposerons expressément que, pendant la déformation, les liaisons que les assemblages établissent entre les pièces de la construction ne sont pas modifiées par les efforts que ces assemblages peuvent avoir à supporter ; par exemple, il ne devra se produire aucun glissement entre dès pièces serrées entre elles.

Nous supposerons également que le jeu des articulations s'effectue sans frottement et qu'aucun arc-boutement n'est possible.

Il résulte de ces hypothèses que les déformations de la construction ne dépendent que de l'élasticité des pièces et des assemblages, et qu'en conséquence, le principe de la superposition des effets élastiques, applicable à chaque élément du système, pris isolément, s'étend à l'ensemble de la construction.

§ 26. — Travail accompli pendant la déformation.

En appliquant le théorème du travail, comme nous l'avons déjà fait aux chapitres Ier et II, on reconnaît que, pendant toute défor-

Digitized by Google

mation, la somme des travaux des forces extérieures et des forces intérieures, ou élastiques, est nulle.

D'ailleurs, le travail de ces dernières est, pour chaque pièce du système, exprimé par la formule (1), et, plus généralement par la formule (1') (§ 3 et § 18); le travail total des forces intérieures est donc, pour la construction entière, que nous supposerons composée de n pièces, telles que AB :

$$-\sum_{1}^{n}\int_{A}^{B}\left(\frac{M_\xi^2}{GI_\xi}+\frac{M_\eta^2}{EI_\eta}+\frac{M_\zeta^2}{EI_\zeta}+\frac{N^2}{ES}+\frac{T_\eta^2}{GS}+\frac{T_\zeta^2}{GS}\right)ds.$$

Par conséquent, en négligeant le travail des forces élastiques dans les assemblages, relativement à celui beaucoup plus important accompli dans les pièces proprement dites, on a :

$$(1'')\quad \mathfrak{T}=\sum_{1}^{n}\int_{A}^{B}\left(\frac{M_\xi^2}{GI_\xi}+\frac{M_\eta^2}{EI_\eta}+\frac{M_\zeta^2}{EI_\zeta}+\frac{N^2}{ES}+\frac{T_\eta^2}{GS}+\frac{T_\zeta^2}{GS}\right)ds,$$

$\mathfrak{T}$ représentant le travail des forces extérieures.

§ 27. — Théorèmes de réciprocité. — Formules générales.

Les travaux accomplis pendant la déformation par une force F appliquée à un point, ou par un couple C agissant sur une section d'une pièce quelconque de la construction, conservent évidemment les expressions établies aux §§ 4 et 5 et rappelées aux §§ 19 et 20 :

$$\mathfrak{T}=\frac{1}{2}\lambda F^2,\quad \mathfrak{T}=\frac{1}{2}\gamma C^2.$$

Ces deux formules et l'équation (1'') sont, concurremment avec le principe de la superposition des effets élastiques des forces, le fondement de l'analyse à suivre pour établir les théorèmes de réciprocité et les formules générales dans le cas des constructions élastiques. Cette analyse est d'ailleurs identique à celle développée au chapitre I^{er} et résumée au chapitre II; les calculs à faire sont simplement modifiés par l'introduction du signe $\sum_{1}^{n}$ devant

Digitized by Google

les intégrales, ainsi que le montre la comparaison des équations (1') et (1"). Nous pouvons donc énoncer immédiatement les résultats auxquels on parvient.

THÉORÈMES DE RÉCIPROCITÉ. — *Étant donné un système composé d'une pièce élastique unique, ayant pour ligne moyenne une courbe plane ou gauche, ou d'un nombre quelconque de pièces de cette espèce, arbitrairement disposées dans l'espace et* assemblées *ou* articulées *entre elles. ce système pouvant d'ailleurs être ou non assujetti à des liaisons surabondantes extérieures ou intérieures :*

1° Si une force égale à l'unité et de direction Δ_1, *appliquée à un point (1) d'une pièce quelconque, imprime à un point (2), appartenant à la même pièce ou à une autre pièce, un déplacement dont la projection sur une direction* Δ_2 *a pour valeur* λ_2^1, *réciproquement, une force égale à l'unité, appliquée au point (2) suivant la direction* Δ_2, *imprime au point (1) un déplacement dont la projection* λ_1^2 *sur la direction* Δ_1 *est égale à* λ_2^1 (*).

2° Si un couple égal à l'unité, et dont l'axe a une direction Δ_1, *appliqué à une section* D_1 *d'une pièce quelconque, imprime à un point (2), appartenant à la même pièce ou à une autre pièce, un déplacement linéaire dont la projection sur une direction* Δ_2 *a une valeur* λ_2^1, *réciproquement, une force égale à l'unité, appliquée au point (2) suivant la direction* Δ_2, *imprime à la section* D_1 *un déplacement de rotation qui, reporté sur l'axe représentatif, a pour projection* γ_1^2 *sur* Δ_1, *la même valeur* λ_2^1.

3° Si un couple égal à l'unité et dont l'axe a une direction Δ_1, *appliqué à une section* D_1 *d'une pièce quelconque, imprime à une section* D_2, *appartenant à la même pièce ou à une autre pièce, un déplacement de rotation qui, reporté sur l'axe représentatif, a pour projection sur une direction* Δ_2 *une valeur* γ_2^1, *réciproquement, un couple égal à l'unité, appliqué à la section* D_2, *et dont l'axe est dirigé suivant* Δ_2, *imprime à la sec-*

(*) Ce premier théorème a été établi par M. le professeur Krohn (Voir le *Génie Civil*, numéro du 21 septembre 1885), en ce qui concerne *exclusivement* les déplacements des nœuds des systèmes élastiques librement dilatables, composés de barres rectilignes articulées entre elles.

Notre savant et honoré maître, M. Maurice Lévy, a donné une nouvelle démonstration du théorème de Krohn dans les additions à son beau Mémoire sur *la recherche des tensions dans les systèmes de barres élastiques et sur les systèmes qui, à volume égal de matière, offrent la plus grande résistance possible*, présenté à l'Académie en 1873, additions contenues dans la seconde édition de son grand *Traité de Statique graphique* (1888).

Digitized by Google

tion D_1 *un déplacement de rotation qui, reporté sur l'axe représentatif, a pour projection* γ_1^2 *sur* Δ_1, *la même valeur* γ_2^1 (**).

FORMULES GÉNÉRALES. — Dans le cas le plus général possible, où les pièces de la construction sont à double courbure ou bien, tout en ayant pour lignes moyennes des courbes planes, subissent des déformations non parallèles aux plans de ces lignes moyennes, les formules exprimant les déplacements linéaires et de rotation sont les suivantes :

(A″)

$$l = \sum_{1}^{n} \int_{A}^{B} \left(\frac{M_\xi \mu_\xi}{G I_\xi} + \frac{M_\eta \mu_\eta}{E I_\eta} + \frac{M_\zeta \mu_\zeta}{E I_\zeta} + \frac{N \nu}{E S} + \frac{T_\eta \theta_\eta}{G S} + \frac{T_\zeta \theta_\zeta}{G S} \right) ds;$$

(B″)

$$g = \sum_{1}^{n} \int_{A}^{B} \left(\frac{M_\xi \mu_\xi}{G I_\xi} + \frac{M_\eta \mu_\eta}{E I_\eta} + \frac{M_\zeta \mu_\zeta}{E I_\zeta} + \frac{N \nu}{E S} + \frac{T_\eta \theta_\eta}{G S} + \frac{T_\zeta \theta_\zeta}{G S} \right) ds.$$

Dans ces formules, $M_\xi, \ldots, N, \ldots, T_\zeta$ représentent les moments, tensions longitudinales et efforts tranchants développés dans les sections transversales des pièces par les forces agissant sur la construction.

$\mu_\xi, \mu_\eta, \ldots, \nu, \ldots, \theta_\zeta$ désignent :

1° Dans la formule (A″), les moments, tensions et efforts tranchants produits dans les sections transversales des pièces par une *force auxiliaire* égale à l'unité, appliquée au point dont on cherche le déplacement et ayant la direction suivant laquelle on veut évaluer ce déplacement.

2° Dans la formule (B″), les éléments de même nature produits par un *couple auxiliaire*, appliqué à la section transversale dont on cherche le déplacement de rotation et ayant pour direction de son axe la direction suivant laquelle on veut évaluer la rotation.

(**) Ces trois théorèmes sont le fondement d'une méthode générale de recherche des *lignes d'influence* dans les constructions élastiques astreintes à des liaisons surabondantes. En les combinant avec certains tracés résultant des formules générales, on peut démontrer que, quelles que soient les liaisons surabondantes auxquelles une construction est assujettie, les lignes d'influence des forces de liaison, ou réactions des appuis, sont des *courbes funiculaires*, faciles à déterminer, et dont nous donnerons la construction notamment pour les arcs et les poutres continues (II[e] Partie). Cette proposition a été énoncée pour la première fois, par M Maurice Lévy, en ce qui concerne spécialement la Poussée des arcs.

Digitized by Google

Dans le cas d'une construction composée de pièces dont les lignes moyennes sont planes avant la déformation et restent telles après, les termes M_ξ, M_ζ, T_η, s'annulent et on a simplement :

$$(A_1') \qquad l = \sum_1^n \int_A^B \left(\frac{M\mu}{EI} + \frac{N\nu}{ES} + \frac{T\theta}{GS} \right) ds$$

$$(B_1') \qquad g = \sum_1^n \int_A^B \left(\frac{M\mu}{EI} + \frac{N\nu}{ES} + \frac{T\theta}{GS} \right) ds ,$$

en remplaçant les notations M_η, et T_ζ par M et T.

Ces équations sont de même forme que celles (A) et (B) du chapitre I^er^.

§ 28. — Sur l'application des formules générales aux constructions assujetties à des liaisons surabondantes, soit extérieures, soit intérieures.

On démontrerait, comme il a été fait au § 13 et rappelé au § 22, que, pour le calcul des termes auxiliaires $\mu_\xi, \ldots \nu, \ldots \theta_\zeta$ des formules (A″) et (B″) et de ceux μ, ν, θ, des formules (A_1'') et (B_1''), on peut supposer la construction dépouillée de ses liaisons surabondantes *extérieures*.

Nous allons établir qu'on peut également, pour ce calcul, considérer la construction comme débarrassée de ses liaisons surabondantes *intérieures*.

Afin de simplifier les formules entrant dans la démonstration, nous supposerons que la construction est composée de pièces dont les lignes moyennes sont toutes situées dans un

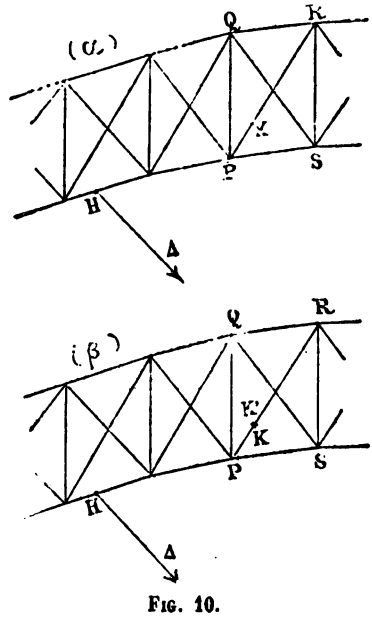


FIG. 10.

Digitized by Google

même plan, et que les forces extérieures quelconques qui la sollicitent sont situées dans ce plan ; dans ces conditions, les déplacements des divers points de chaque pièce ont lieu parallèlement à ce plan et les formules exprimant ces déplacements sont celles (A_1''), (B_1'').

D'autre part, pour fixer les idées, nous supposerons que les liaisons surabondantes *intérieures* sont dues notamment à la présence d'une pièce surabondante PR, *assemblée* en P et en R. *(Fig. 10.)*

Proposons-nous de calculer, par exemple, le déplacement d'un point H quelconque, suivant une direction Δ, arbitrairement choisie, en supposant connus les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants M, N, T, que les forces données produisent en toutes les sections transversales des pièces. Ce déplacement est exprimé par la formule :

$$(A_1') \qquad l = \sum_1^n \int_A^B \left(\frac{M\mu}{EI} + \frac{N\nu}{ES} + \frac{T\theta}{GS} \right) ds,$$

dans laquelle μ, ν, θ, sont les moments, tensions et efforts tranchants que produirait dans les pièces de la construction une force auxiliaire égale à l'unité, appliquée en H, et dirigée suivant Δ.

Cela posé, comparons la construction considérée à celle qui serait obtenue en supprimant la pièce surabondante PR, ou, ce qui revient au même, en coupant cette pièce suivant une section transversale K quelconque. Désignons par (α) la première construction, par (β) la seconde.

Sous l'action des forces extérieures, il se développe dans la section K de la pièce PR de la construction (α) des efforts intérieurs équivalents à une force et à un couple : soient F et C cette force et ce couple, considérés comme actions de la partie de barre RK sur la partie PK. Si, à la construction (β) on applique, outre les forces extérieures données, 1° une force F et un couple C à l'extrémité K du tronçon PK; 2° une force —F et un couple —C à l'extrémité K′ du tronçon RK′, il est clair que les moments fléchissants, les tensions longitudinales, les efforts tranchants et les déformations qui en résulteront seront exactement les mêmes dans ladite construction que dans celle (α) : en particulier, le déplace-

Digitized by Google

ment du point H sera le même, et les deux extrémités de tronçons K et K′ resteront en contact dans la construction (β).

De même, sous l'action de la force auxiliaire, il se développe, dans la section K de la barre P R de la construction (α), des forces intérieures réductibles à une force F_1 et à un couple C_1. Si, à la construction (β) on applique, outre la force auxiliaire, 1° une force F_1 et un couple C_1 à l'extrémité K du tronçon P K; 2° une force $-F_1$ et un couple $-C_1$, à l'extrémité K′ du tronçon R K′, les moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants en qui résulteront seront les mêmes dans la construction (β) que dans celle (α); leurs valeurs seront donc μ, ν, θ.

Or, en toute section des pièces de (β), les moments, tensions et efforts tranchants sont respectivement les sommes des quantités de même nature produites en cette section, par la force auxiliaire et par les efforts F_1, C_1, $-F_1$, $-C_1$, appliqués où il a été dit plus haut. Soient μ', ν', θ' celles de ces quantités qui correspondent à la force auxiliaire; soient, de plus, μ_{F_1}, ν_{F_1}, θ_{F_1}; μ_{C_1}, ν_{C_1}, θ_{C_1}; μ_{-F_1}, ν_{-F_1}, θ_{-F_1}; μ_{-C_1}, ν_{-C_1}, θ_{-C_1}, les moments, tensions et efforts tranchants que produiraient respectivement des forces et des couples égaux à l'unité et ayant mêmes directions et mêmes sens que F_1, C_1, $-F_1$, $-C_1$. On a, dès lors, en chaque section des différentes barres :

$$\mu = \mu' + \mu_{F_1} F_1 + \mu_{C_1} C_1 + \mu_{-F_1} F_1 + \mu_{-C_1} C_1,$$
$$\nu = \nu' + \nu_{F_1} F_1 + \nu_{C_1} C_1 + \nu_{-F_1} F_1 + \nu_{-C_1} C_1,$$
$$\theta = \theta' + \theta_{F_1} F_1 + \theta_{C_1} C_1 + \theta_{-F_1} F_1 + \theta_{-C_1} C_1.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression (A_1'') du déplacement du point H, il vient :

$$l = \sum_1^n \int_A^B \left(\frac{M\mu'}{EI} + \frac{N\nu'}{ES} + \frac{T\theta'}{GS} \right) ds +$$

$$+ F_1 \left\{ \sum_1^n \int_A^B \left(\frac{M\mu_{F_1}}{EI} + \frac{N\nu_{F_1}}{ES} + \frac{T\theta_{F_1}}{GS} \right) ds + \right.$$

Digitized by Google

$$+\sum_{1}^{n}\int_{A}^{B}\left(\frac{M\mu_{-F_1}}{EI}+\frac{N\nu_{-F_1}}{ES}+\frac{T\theta_{-F_1}}{GS}\right)ds\Bigg\}$$

$$+C_1\Bigg\{\sum_{1}^{n}\int_{A}^{B}\left(\frac{M\mu_{C_1}}{EI}+\frac{N\nu_{C_1}}{ES}+\frac{T\theta_{C_1}}{GS}\right)ds$$

$$+\sum_{1}^{n}\int_{A}^{B}\left(\frac{M\mu_{-C_1}}{EI}+\frac{N\nu_{-C_1}}{ES}+\frac{T\theta_{-C_1}}{GS}\right)ds\Bigg\}$$

Or, la première somme de la parenthèse que multiplie F_1, renferme les produits des moments, tensions et efforts tranchants que développeraient les forces extérieures et les efforts F_1, C_1,—F_1, — C_1, dans la construction (β), par les moments, tensions et efforts tranchants μ_{F_1}, ν_{F_1}, θ_{F_1}, que développerait une force égale à l'unité, appliquée à l'extrémité K du tronçon de barre PK et ayant même direction et même sens que F_1. Cette somme représente donc le déplacement imprimé au point K par les forces extérieures et les efforts F_1, C_1, — F_1, — C_1, déplacement estimé suivant la direction de F_1.

De même, la seconde somme de cette parenthèse représente le déplacement du point K′ dû à ces mêmes forces et estimé suivant la direction — F_1.

Or, nous avons vu précédemment que dans la déformation de la construction (β) les deux extrémités K et K′ des tronçons PK et RK′ restaient en contact. Il s'ensuit que les déplacements des points K et K′ sont les mêmes et que, par suite, le déplacement de K′ estimé suivant — F_1 est égal et de signe contraire à celui de K estimé suivant + F_1. Leur somme, c'est-à-dire la parenthèse dont F_1 est facteur, est donc nulle.

On démontrerait de même que la parenthèse qui multiplie C_1 est nulle, par la considération des déplacements angulaires et en se fondant sur ce que, dans la déformation de la construction (β), les deux sections extrêmes K et K′ restent en coïncidence.

Digitized by Google

La formule du déplacement du point H se réduit donc finalement à :

$$l = \sum_{1}^{n} \int_{A}^{B} \left(\frac{M\mu'}{EI} + \frac{N\nu'}{ES} + \frac{T\theta'}{GS} \right) ds.$$

Par conséquent, au lieu de faire entrer dans la formule (A_1'') les quantités auxiliaires μ, ν, θ, on peut y introduire celles μ', ν', θ', correspondant à l'action de la force auxiliaire sur la construction (β), c'est-à-dire sur la construction (α) donnée, dépouillée des liaisons surabondantes intérieures dues à la présence de la pièce surabondante PR.

La démonstration qui précède s'étend à toutes les pièces et liaisons surabondantes intérieures.

Nous avons établi précédemment la même proposition en ce qui concerne les liaisons surabondantes extérieures.

On peut donc faire abstraction des liaisons surabondantes tant *extérieures* qu'*intérieures* pour la détermination des quantités auxiliaires μ, ν, θ, qui sont dès lors indépendantes de l'élasticité et, par suite, calculables par les procédés de la statique.

Il faut remarquer que, dans la formule qui précède, les termes μ', ν', θ' n'existent que pour les pièces non surabondantes; il en est de même des produits $M\mu'$, $N\nu'$, $T\theta'$; la somme $\sum$ ne concerne donc que les pièces en question, dont nous représenterons le nombre par p; le déplacement l ne dépend donc pas, explicitement du moins, des moments fléchissants, tensions longitudinales et efforts tranchants développés par les forces extérieures dans les $(n-p)$ pièces surabondantes, et la formule qui l'exprime doit être écrite comme suit :

$$l = \sum_{1}^{p} \int_{A}^{B} \left(\frac{M\mu'}{EI} + \frac{N\nu'}{ES} + \frac{T\theta'}{GS} \right) ds.$$

Il va de soi que la démonstration que nous venons de donner s'applique également aux constructions dont les pièces sont situées dans des plans différents, ou même ont pour lignes moyennes des

Digitized by Google

courbes gauches. Et la formule (A') du déplacement linéaire devient :

$$l=\sum_{1}^{p}\int_{A}^{B}\left(\frac{M_\xi \mu'_\xi}{G I_\xi}+\frac{M_\eta \mu'_\eta}{E I_\eta}+\frac{M_\zeta \mu'_\zeta}{E I_\zeta}+\frac{N\nu'}{E S}+\frac{T_\eta \theta'_\eta}{G S}+\frac{T_\zeta \theta'_\zeta}{G S}\right)ds.$$

On établirait de même que les formules (B_1') et (B') des déplacements de rotation se transforment en les suivantes :

$$g=\sum_{1}^{p}\int_{A}^{B}\left(\frac{M\mu'}{EI}+\frac{N\nu'}{ES}+\frac{T\theta'}{GS}\right)ds,$$

$$g=\sum_{1}^{p}\int_{A}^{B}\left(\frac{M_\xi \mu'_\xi}{G I_\xi}+\frac{M_\eta \mu'_\eta}{E I_\eta}+\frac{M_\zeta \mu'_\zeta}{E I_\zeta}+\frac{N\nu'}{ES}+\frac{T_\eta \theta'_\eta}{GS}+\frac{T_\zeta \theta'_\zeta}{GS}\right)ds,$$

dans lesquelles μ', ν', θ', μ'_ξ,... ν',.. θ'_ζ sont les moments, tensions et efforts tranchants développés par un couple auxiliaire égal à l'unité, appliqué à la section dont on cherche le déplacement de rotation et ayant son axe dirigé parallèlement à la direction suivant laquelle on veut estimer la rotation.

Il est essentiel de remarquer enfin, comme nous l'avons déjà fait au § 13, que *les formules générales qui précèdent renferment implicitement autant d'expressions différentes des déformations que les liaisons, tant extérieures qu'intérieures, auxquelles la construction est assujettie, peuvent former de groupes différents de liaisons indépendantes de l'élasticité.*

§ 29. — Application aux constructions composées de barres rectilignes.

Nous admettrons, — et cette hypothèse est ordinairement remplie dans la pratique, — que les lignes moyennes, ou axes de figure des barres qui ont un assemblage commun, concourent en un même point, ou nœud, de cet assemblage.

On pourra généralement, pour le calcul des quantités auxiliaires μ_ξ,... ν,.. θ_ζ , ou μ, ν, θ, remplacer les assemblages par

Digitized by Google

des rotules placées aux nœuds (*) et, en outre, supprimer les barres surabondantes, ce qui a pour effet de faire disparaître les liaisons surabondantes intérieures.

Cela posé, si on se propose de calculer le déplacement d'un nœud quelconque, les termes $\mu_\xi \ldots \nu \ldots \theta_\zeta$, ou μ, ν, θ, des formules (A″) ou (A″$_1$) répondront à l'application à ce nœud d'une force auxiliaire égale à l'unité. Or les barres de la construction modifiée par la suppression des liaisons surabondantes étant rectilignes et articulées à leurs extrémités, la force auxiliaire n'y produit aucun moment, ni aucun effort tranchant; par suite, les termes μ_ξ, μ_η, μ_ζ, θ_η, θ_ζ, ou μ et θ, sont nuls, et les formules (A″) et (A$_1$″) se réduisent, l'une et l'autre, à la forme très simple :

$$(A''') \qquad l = \sum_1^p \int_A^B \frac{N\,\nu}{ES}\,ds = \sum_1^p \nu \int_A^B \frac{N}{ES}\,ds,$$

puisque la tension longitudinale auxiliaire est constante tout le long d'une même barre.

Si on suppose en outre, — ce qui a lieu ordinairement, — que les forces extérieures sont appliquées seulement aux nœuds de la construction, et que chaque barre présente une section constante, (A‴) devient, en représentant par s la longueur d'une barre :

$$(A_1''') \qquad l = \sum_1^p \frac{s\,\nu}{ES} N.$$

§ 30. — Corollaires des théorèmes de réciprocité.

Il est clair que les théorèmes de réciprocité, relatifs aux constructions élastiques, admettent les trois mêmes corollaires que les théorèmes concernant les pièces pleines. (Voir au § 24 l'énoncé de ces corollaires.)

(*) Il suffit pour cela qu'après le remplacement des assemblages par des rotules, la forme géométrique de la construction reste déterminée.

Digitized by Google

NOTE

Sur le Théorème des Dérivées du Travail.

Nous allons montrer que le théorème des dérivées du travail, dû à l'ingénieur italien Castigliano, est une conséquence particulière des formules générales établies précédemment.

Pour simplifier, nous considérerons une pièce ayant pour ligne moyenne une courbe plane et sollicitée par des forces situées dans le plan de cette courbe. Le mode de démonstration que nous allons employer conviendrait d'ailleurs à une pièce ayant pour ligne moyenne une courbe gauche, ou à une construction élastique quelconque.

Soient F_1, F_2, ... F_p ..... F_n, les forces extérieures données.

Appliquons la formule (A) au calcul du déplacement du point d'application de la force F_p, estimé suivant la direction de cette force. Désignons respectivement par :

M_1, M_2... M_p... M_n, les moments fléchissants,
N_1, N_2... N_p... N_n, les tensions longitudinales,
T_1, T_2... T_p... T_n, les efforts tranchants,

que produirait dans la pièce chacune des forces données agissant seule ; et par :

$$\mu_1,\ \mu_2 \ldots\ \mu_p \ldots\ \mu_n$$
$$\nu_1,\ \nu_2 \ldots\ \nu_p \ldots\ \nu_n$$
$$\theta_1,\ \theta_2 \ldots\ \theta_p \ldots\ \theta_n$$

les éléments de même nature que produiraient respectivement des forces égales à l'unité, ayant mêmes points d'application, mêmes directions et mêmes sens que F_1, F_2... F_p... F_n.

On a entre ces quantités les relations suivantes :

$$\begin{array}{lll} M_1 = \mu_1 F_1 & M_p = \mu_p F_p & M_n = \mu_n F_n \\ N_1 = \nu_1 F_1 & N_p = \nu_p F_p & N_n = \nu_n F_n \\ T_1 = \theta_1 F_1 & T_p = \theta_p F_p & T_n = \theta_n F_n \end{array}$$

En désignant par M, N, T, le moment fléchissant, la tension longitudinale et l'effort tranchant produits en une section quelconque de la pièce par les forces données agissant simultanément, on a :

$$(1)\begin{cases} M = M_1 + \ldots M_p + \ldots M_n = \mu_1 F_1 + \ldots \mu_p F_p + \ldots \mu_n F_n \\ M = N_1 + \ldots N_p + \ldots N_n = \nu_1 F_1 + \ldots \nu_p F_p + \ldots \nu_n F_n \\ T = T_1 + \ldots T_p + \ldots T_n = \theta_1 F_1 + \ldots \theta_p F_p + \ldots \theta_n F_n \end{cases}$$

Digitized by Google

D'autre part, le déplacement cherché a pour expression, en vertu de la formule (A) :

$$(2) \qquad l = \int_A^B \left(\frac{M \mu_p}{EI} + \frac{N \nu_p}{ES} + \frac{T \theta_p}{GS} \right) ds.$$

En différentiant les équations (1) par rapport à F_p, il vient :

$$(3) \qquad \frac{dM}{dF_p} = \mu_p, \quad \frac{dN}{dF_p} = \nu_p, \quad \frac{dT}{dF_p} = \theta_p$$

Substituant dans (2), on a :

$$l = \int_A^B \left(\frac{M \frac{dM}{dF_p}}{EI} + \frac{N \frac{dN}{dF_p}}{ES} + \frac{T \frac{dT}{dF_p}}{GS} \right) ds.$$

Or :

$$\frac{M \frac{dM}{dF_p}}{EI} = \frac{\frac{1}{2} \frac{dM^2}{dF_p}}{EI} = \frac{1}{2} \frac{d \frac{M^2}{EI}}{dF_p}$$

et, par analogie :

$$\frac{N \frac{dN}{dF_p}}{ES} = \frac{1}{2} \frac{d \frac{N^2}{ES}}{dF_p}; \quad \frac{T \frac{dT}{dF_p}}{GS} = \frac{1}{2} \frac{d \frac{T^2}{GS}}{dF_p}.$$

Par suite, l prend pour expression :

$$l = \int_A^B \frac{1}{2} \frac{d \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS} \right)}{dF_p} ds$$

$$= \frac{d}{dF_p} \int_A^B \frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{N^2}{ES} + \frac{T^2}{GS} \right) ds.$$

Cette dernière intégrale représente, d'après la formule (1) du chapitre premier, le travail $\mathfrak{T}$ accompli par les forces extérieures pendant la déformation, on a donc finalement :

$$l = \frac{d \mathfrak{T}}{dF_p}.$$

Donc :

THÉORÈME DES DÉRIVÉES DU TRAVAIL. — *Étant donnée une pièce ou une construction élastique soumise à des forces quelconques, le déplacement du point d'application d'une quelconque de ces forces, estimé suivant la*

Digitized by Google

direction de cette force, est égal à la dérivée partielle, par rapport à cette force, du travail accompli par les forces extérieures, pendant la déformation.

On remarquera que les formules des chapitres I, II et III sont beaucoup plus générales que le théorème des dérivées du travail. Effectivement, ce dernier ne fait connaître que les déplacements de points tout à fait particuliers, ceux d'application des forces extérieures ; et encore ces déplacements sont-ils évalués en projection sur des directions également particulières, celles des forces extérieures. Les formules (A″), (B″), au contraire, donnent les déplacements linéaires, ou de rotation, d'un point ou d'une section quelconque, estimés suivant des directions arbitrairement choisies.

Il faut ajouter, en outre, que l'application de ces formules est plus rapide que celle du théorème des dérivées du travail.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE Ier — Pages.

Nouvelles formules générales exprimant les déformations d'une pièce fléchie, dont la ligne moyenne est une courbe plane. — Réciprocité des déplacements . . . 3

1. Hypothèses. — 2. Définitions. — 3. Travail accompli pendant la déformation. — 4. Déplacement du point d'application d'une force extérieure pendant la déformation. — 5. Angle décrit pendant la déformation par une section à laquelle est appliqué un couple extérieur dont l'axe est dirigé perpendiculairement au plan de la ligne moyenne. — 6. Déplacement d'un point quelconque d'une poutre soumise en un de ses points à l'action d'une force extérieure. — Premier théorème de réciprocité. — 7. Déplacement d'un point quelconque d'une poutre soumise à l'action d'un couple agissant sur une section donnée. — Second théorème de réciprocité. — 8. Remarque. — 9. *Première formule générale :* Déplacement d'un point quelconque d'une poutre soumise à l'action simultanée de plusieurs efforts extérieurs, forces ou couples. — 10. Déplacement angulaire d'une section quelconque d'une poutre déformée par une force extérieure appliquée en un point donné. — 11. Déplacement angulaire d'une section quelconque d'une poutre déformée par un couple extérieur appliqué à une section donnée. — Troisième théorème de réciprocité. — 12. *Seconde formule générale :* Déplacement angulaire d'une section quelconque d'une poutre soumise à l'action simultanée de plusieurs efforts, forces ou couples. — 13. Sur l'application des formules générales aux pièces assujetties à des liaisons surabondantes. — 14. Identité des formules générales. — 15. Simplification des formules générales dans le cas où l'on néglige les déformations de l'ordre de la tension longitudinale et de l'effort tranchant. — 16. Corollaires des théorèmes de réciprocité.

CHAPITRE II

Extension des formules générales et des théorèmes de réciprocité aux pièces ayant pour ligne moyenne une courbe gauche et soumises à des forces quelconques 27

17. Hypothèses et définitions. — 18. Travail accompli pendant la déformation. — 19. Déplacement du point d'application d'une force extérieure pendant la déformation. — 20. Déplacement angulaire d'une section à laquelle est appliqué un couple extérieur quelconque. — 21. Théorèmes de réciprocité. — Formules générales. — 22. Remarques sur les formules générales. — 23. Simplification des formules générales dans le cas où l'on néglige les déformations de l'ordre de la tension longitudinale et de l'effort tranchant. — 24. Corollaires des théorèmes de réciprocité.

CHAPITRE III

Extension des formules générales et des théorèmes de réciprocité aux constructions élastiques 36

25. Hypothèses et définitions. — 26. Travail accompli pendant la déformation. — 27. Théorèmes de réciprocité. — Formules générales. — 28. Sur l'application des formules générales aux constructions assujetties à des liaisons surabondantes, soit extérieures, soit intérieures. — 29. Application aux constructions composées de barres rectilignes. — 30. Corollaires des théorèmes de réciprocité.

NOTE

Sur le théorème des dérivées du Travail 48

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX. — RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 21910-10-8

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

A LA MÊME LIBRAIRIE

APPERT (Léon). — Emploi de l'air comprimé dans le soufflage et le travail du verre (46 figures). Prix . . . . . 1 fr. 50

BERTHELOT (M.), professeur au Collège de France, membre de l'Institut. — **Les origines de l'alchimie.** In-8 cavalier.

Sur papier teinté avec lettres ornées, entêtes et culs-de-lampe, contenant un portrait de l'auteur à l'eau-forte, gravé par **A.** Boulard fils, et des reproductions en fac-similé de la Chrysopée de Cléopâtre et des signes alchimiques des métaux, d'après un manuscrit de Saint-Marc, à Venise, du XI^e^ siècle. Prix . . . . . 15 fr.

Il a été tiré 100 exemplaires sur papier de Hollande ; eau-forte sur papier du Japon. Prix . . . . . 20 fr.

BERTHELOT, membre de l'Institut, professeur au Collège de France, et **C.-E. RUELLE**, conservateur de Sainte-Geneviève. — **Collection des alchimistes grecs.**

La publication comprend :

1° Une introduction avec notes scientifiques et nombreuses figures. Cette introduction est due à M. Berthelot ; 2° la réimpression intégrale du plus ancien manuscrit alchimique connu, celui de Saint-Marc, à Venise, avec de nombreuses notes philologiques et scientifiques. Le texte grec et les notes philologiques sont dues à M. Ruelle, les notes scientifiques à M. Berthelot ; 3° la traduction française du manuscrit de Saint-Marc, due à M. Ruelle, revisée et commentée par M. Berthelot ; 4° des tables très détaillées.

L'ensemble de la publication forme environ 1,200 pages in-carré sur le type des *Documents inédits* publiés par le Ministère de l'Instruction publique.

L'éditeur ne met en vente que 150 exemplaires seulement, numérotés. Prix . . 80 fr.

BERTHELOT. — Introduction à l'histoire de la chimie dans l'antiquité et au moyen âge. Pour paraître incessamment.

BERTRAND de FONTVIOLANT, Ingénieur des Arts et Manufactures. — **Calcul des poutres continues. Méthode générale analytique et méthode graphique.** Prix . . . . . 4 fr.

CLÉMANDOT. — La trempe par compression. Prix . . . 0 fr. 75

FABRE, médecin des mines de Commentry. — **De l'influence du travail souterrain sur la santé des mineurs.** 1 vol. in-8. Prix . . . 1 fr. 50

FABRE. — Des conditions hygiéniques des houillères. Brochure in-8. Prix . . . . . 0 fr. 50

KNAB, répétiteur du cours de métallurgie à l'École Centrale. **Fabrication et emplois industriels de l'acier.** in-8 raisin, avec 76 figures. Prix . . . . . 18 fr.

LAMBLING, professeur à la Faculté de médecine de Lille, licencié ès sciences physiques. — **Des origines de la chaleur et de la force chez les êtres vivants.** Prix . . . . . 4 fr.

MOISSAN, professeur à l'École de pharmacie. — **Série du cyanogène.** 1 vol. in-8. Prix . . . . . 4 fr.

VALLOT, Ingénieur des Arts et Manufactures. — **Du mouvement de l'eau dans les tuyaux circulaires.** — Théorie de MAURICE LÉVY. — Table pour le calcul des conduites. Prix . . . . . 2 fr. 50

PARIS. — IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE. — 21912-10-8

Digitized by Google

5475 11.3

MÉMOIRE

SUR LES

DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES

DES

PIÈCES ET DES SYSTÈMES DE PIÈCES

A FIBRES MOYENNES PLANES OU GAUCHES

THÉORIE NOUVELLE ET APPLICATIONS

PAR

M. BERTRAND DE FONTVIOLANT

INGÉNIEUR A LA COMPAGNIE DE FIVES-LILLE
RÉPÉTITEUR DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE A L'ÉCOLE CENTRALE

DEUXIÈME PARTIE

ARCS — POUTRES CONTINUES — POUTRES ENCASTRÉES

Forces extérieures fixes — Variations de température
Lignes d'influence.

Présenté à l'Académie des Sciences, les 6 Août 1888 et 7 janvier 1889
(tomes CVII et CVIII des Comptes rendus)

Extrait des Mémoires de la Société des Ingénieurs civils.

PARIS
G. STEINHEIL, ÉDITEUR
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE CENTRALE
2, rue Casimir-Delavigne. 2

1889

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR LES

DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES

DES

PIÈCES ET DES SYSTÈMES DE PIÈCES

A FIBRES MOYENNES PLANES OU GAUCHES

THÉORIE NOUVELLE ET APPLICATIONS

DEUXIÈME PARTIE

ARCS — POUTRES CONTINUES — POUTRES ENCASTRÉES

Forces extérieures fixes — Variations de température — Lignes d'influence

---

CHAPITRE PREMIER

Expressions symboliques et construction des déformations des pièces à fibres moyennes planes.

§ 31. — Indications préliminaires.

Nous allons transformer les formules générales simplifiées (A_1) et (B_1) (§ 15, 1re partie) (*) en ayant égard à la nature des liaisons auxquelles la pièce considérée est soumise.

Pour plus de généralité, nous supposerons qu'il y a des liaisons surabondantes. On sait que, dans ce cas, pour le calcul des quantités μ, ν et θ qui entrent dans les formules (A) et (B), on peut supprimer les liaisons surabondantes, c'est-à-dire ramener la pièce à n'être plus astreinte qu'à des liaisons indépendantes de l'élasticité, et qu'on est généralement maître du choix de ces dernières parmi toutes les liaisons existantes (§ 13).

(*) Ces formules supposent qu'on néglige les déformations de l'ordre de la tension longitudinale et de l'effort tranchant.

Digitized by Google

Cette considération conduit à distinguer, suivant que les liaisons indépendantes de l'élasticité appartiennent à l'un ou à l'autre des systèmes définis au § 2, savoir :

1er Système. — Un point de la poutre est assujetti à rester entièrement fixe, tandis qu'un autre point est astreint à demeurer sur une droite donnée du plan de flexion ;

2e Système. — Une section est assujettie à conserver une position invariable.

§ 32. — Expressions symboliques des déformations dans le cas où les liaisons indépendantes de l'élasticité sont du premier système.

Soient AB la pièce donnée *(fig. 1)*, F le point assujetti à rester fixe, E le point astreint à demeurer sur une droite fixe WW' (*).

Soient également deux axes, l'un *ox* parallèle à WW', l'autre *oy* perpendiculaire.

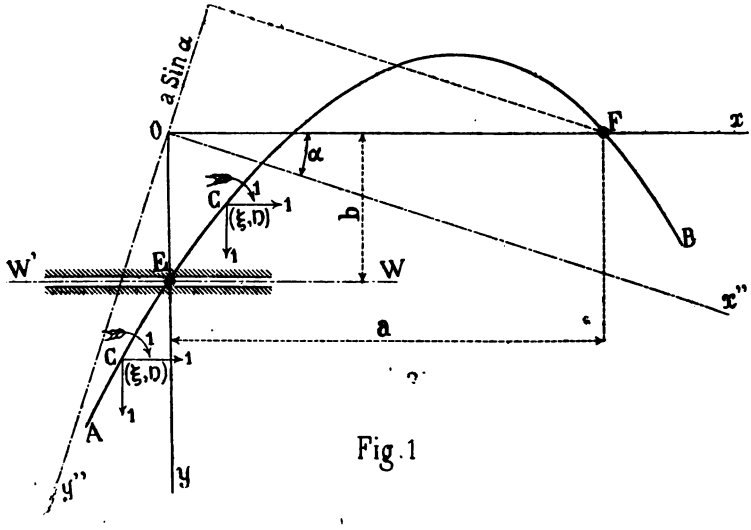


Fig. 1

Les forces agissant sur la poutre sont quelconques, mais situées dans le plan de la ligne moyenne. Elles déterminent en chaque point un moment fléchissant que nous représenterons par M.

Définitions. — Imaginons qu'ayant supprimé ces forces et les liaisons surabondantes, nous appliquions en tous les éléments *ds* de la ligne moyenne, des *efforts fictifs* $\frac{M}{EI}$ *ds* perpendiculaires à WW'

(*) La figure ne représente que le système des liaisons indépendantes de l'élasticité.

Digitized by Google

et dirigés dans le sens des y positifs, ou en sens contraire, suivant que M est positif ou négatif.

Nous appellerons *réactions fictives*, les réactions que ceux des efforts fictifs répartis entre les points E et F déterminent en ces points, abstraction faite des forces fictives agissant sur les parties de poutre AE et FB, ou, autrement dit, en supposant ces deux parties supprimées.

THÉORÈME I. — *Étant donnée une pièce, de ligne moyenne* AB, *soumise à des forces qui y développent des moments fléchissants* M, *et astreinte à des liaisons quelconques mais telles qu'on peut, par la suppression des liaisons surabondantes, la ramener à n'être plus assujettie qu'au premier système de liaisons indépendantes de l'élasticité (point F fixe et point* E *assujetti à demeurer sur une droite* WW'), — *si, ayant rapporté cette pièce à deux axes de coordonnées, l'un ox parallèle à* WW', *l'autre oy perpendiculaire, on applique aux divers éléments ds de la ligne moyenne, des forces fictives* $\frac{M}{EI} ds$ *perpendiculaires à* WW' *et dirigées dans le sens des y positifs ou en sens inverse, suivant que* M *est lui-même positif ou négatif* :

(A). — *En tout point* C *situé entre* A *et* F :

1° *La somme des moments par rapport à* C, *des forces fictives réparties entre* C *et* F *et de la réaction fictive en* F, *représente, en grandeur et en signe, le déplacement* $(l_y)_C$ *du point* C *estimé suivant l'axe des y.*

De sorte que si l'on convient de représenter cette somme de moments par le symbole $\overset{C.\overline{F}}{\underset{C}{M}} \frac{M}{EI} ds$, on a

$$(I) \qquad (l_y)_C = \overset{C.\overline{F}}{\underset{C}{M}} \frac{M}{EI} ds.(*)$$

2° *Si on fait tourner de 90 degrés dans le sens rétrograde* (sens inverse de la rotation des aiguilles d'une montre) *les forces fictives réparties entre* C *et* F, *y compris la réaction fictive en* F, *la somme des moments de ces forces par rapport à* C, *représente, en grandeur et en signe,*

(*) La lettre placée en indice représente le point par rapport auquel les moments sont pris ; les deux lettres supérieures désignent les limites de la zone sur laquellle agissent celles des forces fictives dont il faut prendre les moments ; le trait qui surmonte la lettre F indique que la réaction fictive en F fait partie des dites forces fictives.

Digitized by Google

le déplacement $(l_x)_C$ *du point* C *estimé suivant l'axe des* x ; en sorte qu'on peut écrire

$$(II) \qquad (l_x)_C = \int_C^{C.\bar{F}} \frac{M}{EI} \, \overline{MX} \, ds.$$

3° La somme algébrique des forces fictives réparties entre C *et* F, *y compris la réaction fictive en* F, *représente, en grandeur et au signe près, le déplacement angulaire* g_C *de la section transversale qui contient le point* C ; et nous écrivons

$$(III) \qquad g_C = - \int_C^{C.\bar{F}} \frac{M}{EI} \, \overline{T} \, ds \; (*).$$

(B). — *En tout point* C *situé entre* B *et* E :

1° La somme des moments par rapport à C, des forces fictives réparties entre C *et* E, *et de la réaction fictive en* E, *représente, en grandeur et au signe près, le déplacement du point* C *estimé suivant l'axe des* y ; et l'on a

$$(I\ bis) \qquad (l_y)_C = - \int_C^{C.\bar{E}} \frac{M}{EI} \, \overline{MY} \, ds.$$

2° Si on fait tourner de 90 degrés dans le sens rétrograde, les forces fictives réparties entre C *et* E, *y compris la réaction fictive en* E, *la somme des moments de ces forces par rapport à* C, *représente, en grandeur et au signe près, le déplacement du point* C *estimé suivant l'axe des* x ; on a donc

$$(II\ bis) \qquad (l_x)_C = - \int_C^{C.\bar{E}} \frac{M}{EI} \, \overline{MX} \, ds.$$

3° La somme algébrique des forces fictives réparties entre C *et* E, *y compris la réaction fictive en* E, *représente, en grandeur et en signe, le déplacement angulaire de la section transversale qui contient le point* C ; en sorte qu'on a

$$(III\ bis) \qquad g_C = \int_C^{C.\bar{E}} \frac{M}{EI} \, \overline{T} \, ds.$$

Nous ne justifierons que la partie (A) du théorème ; la partie (B) se démontre d'ailleurs de la même manière.

(*) L'analogie que présente cette somme de forces avec un *effort tranchant* dans une poutre droite nous a conduit à la désigner par la lettre T.

Digitized by Google

Pour simplifier les calculs, nous ferons passer l'axe des y par le point E avant déformation, et celui des x par le point fixe F. a représentera l'abscisse du point F et b l'ordonnée du point E.

DÉMONSTRATION DU 1° DE LA PARTIE (A) DU THÉORÈME. — Appliquons la formule (A_1) (§ 15, 1re partie) à l'évaluation du déplacement $(l_y)_C$. Dans cette formule, M désigne le moment fléchissant produit par les forces directement appliquées, en chaque point de la ligne moyenne de la pièce astreinte à toutes ses liaisons ; μ est le moment fléchissant que produirait, en chaque point de la pièce supposée assujettie seulement aux liaisons indépendantes de l'élasticité, une force auxiliaire égale à l'unité, appliquée en C, dirigée parallèlement à oy et dans le sens des y positifs.

Pour le calcul de μ, il y a lieu de distinguer suivant que C se trouve entre A et E ou entre E et F *(fig. 1)*.

(a) — *Le point* C *est situé entre* A *et* E. — Soient ξ et η ses coordonnées par rapport à ox et oy.

Le moment μ a les valeurs suivantes :

En tout point (xy) situé entre A et C : $\mu = 0$;

— — C et E : $\mu = x - \xi$;

— — E et F : $\mu = -\frac{\xi}{a}(a - x)$

$$= x - \xi - \frac{a - \xi}{a} x;$$

— — F et B : $\mu = o$.

D'où

$$(l_y) = \int_A^B \frac{M\mu}{EI} ds = \int_C^E \frac{M ds}{EI}(x - \xi) + \int_E^F \frac{M ds}{EI}(x - \xi) + \int_E^F \frac{M ds}{EI}\left(-\frac{a - \xi}{a} x\right),$$

ou

$$(a) \qquad (l_y)_C = \int_C^F \frac{M ds}{EI}(x - \xi) - (a - \xi) \int_E^F \frac{M ds}{EI} \frac{x}{a}.$$

Le premier terme de cette formule représente la somme des moments par rapport à C des forces fictives réparties entre C

Digitized by Google

et F, et le second le moment de la réaction fictive en F. On a donc bien, dans le cas où le point C est situé entre A et E,

$$(l_y)_C = \overset{C.\bar{F}}{\underset{C}{M}} Y \frac{M}{EI} ds.$$

(b). —*Le point* C *est situé entre* E *et* F.— Dans ce cas, le moment μ a pour valeurs :

En tout point (xy) situé entre A et E : $\mu = 0$;

— — E et C : $\mu = -\frac{a-\xi}{a} x$;

— — C et F : $\mu = -\frac{\xi}{a}(a-x) = -\frac{a-\xi}{a} x + x - \xi$;

— — F et B : $\mu = 0$.

D'où :

$$(l_y)_C = \int_A^B \frac{M\mu}{EI} ds = \int_E^C \frac{M ds}{EI}\left(-\frac{a-\xi}{a} x\right) + \int_C^F \frac{M ds}{EI}\left(-\frac{a-\xi}{a} x\right) + \int_C^F \frac{M ds}{EI}(x-\xi),$$

ou

$$(a) \qquad (l_y)_C = \int_C^F \frac{M ds}{EI}(x-\xi) - (a-\xi)\int_E^F \frac{M ds}{EI}\frac{x}{a}.$$

Le premier terme de cette formule représente la somme des moments par rapport à C des forces fictives réparties entre C et F, et le second, le moment de la réaction fictive en F ; ce qui justifie le 1° du théorème.

Démonstration du 2° de la partie (A) du théorème. — Appliquons la formule (A_1) à l'évaluation du déplacement $(l_x)_C$. Dans ce cas, μ désigne le moment fléchissant que produirait, en chaque point de la pièce supposée assujettie seulement aux liaisons indépendantes de l'élasticité, une force auxiliaire égale à l'unité, appliquée en C, dirigée parallèlement à ox et dans le sens des x positifs.

Pour le calcul de μ, il faut encore distinguer suivant que C se trouve entre A et E ou entre E et F.

Digitized by Google

(a) — *Le point* C *est entre* A *et* E. — Dans cette hypothèse, le moment μ a les valeurs suivantes :

En tout point (xy) situé entre A et C : $\mu = 0$;
— — C et E : $\mu = \eta - y$;
— — E et F : $\mu = \eta - y - \frac{\eta}{a} x$;
— — F et B : $\mu = 0$.

Par suite

$$(l_x)_C = \int_A^B \frac{M\mu}{EI} ds = \int_C^E \frac{M ds}{EI} (\eta - y) + \int_E^F \frac{M ds}{EI} (\eta - y) - \int_E^F \frac{M ds}{EI} \frac{\eta}{a} x;$$

ou

$$(b) \qquad (l_x)_C = \int_C^F \frac{M ds}{EI} (\eta - y) - \eta \int_E^F \frac{M ds}{EI} \frac{x}{a}.$$

Or, si l'on fait tourner de 90° dans le sens rétrograde les forces fictives $\frac{M ds}{EI}$ et la réaction fictive en F envisagée au 1° du théorème, laquelle a pour expression $\int_E^F \frac{M ds}{EI} \frac{x}{a}$, on voit que le premier terme de la formule (*b*) représente la somme des moments par rapport à C de celles de ces forces qui sont réparties entre C et F et que le second est égal au moment par rapport à C de la réaction fictive en F.

Le 2° du théorème est donc démontré pour le cas où le point C est entre A et E.

(b) *Le point* C *est entre* E *et* F. — Dans cette hypothèse, on a :
En tout point (xy) situé entre A et E : $\mu = 0$;
— — E et C : $\mu = -\frac{\eta}{a} x$;
— — C et F : $\mu = -\frac{\eta}{a} x + (\eta - y)$;
— — F et B : $\mu = 0$.

Digitized by Google

Par conséquent,

$$(l_x)_C = \int_A^B \frac{M\mu}{EI}\,ds = \int_E^C \frac{M\,ds}{EI}\left(-\frac{\eta}{a}x\right) + \int_C^F \frac{M\,ds}{EI}\left(-\frac{\eta}{a}x\right) + \int_C^F \frac{M\,ds}{EI}(\eta - y),$$

ou

$$(b) \qquad (l_x)_C = \int_C^F \frac{M\,ds}{EI}(\eta - y) - \eta \int_E^F \frac{M\,ds}{EI}\frac{x}{a},$$

relation qui conduit à la même conclusion que précédemment.

DÉMONSTRATION DU 3° DE LA PARTIE (A) DU THÉORÈME. — Appliquons la formule (B_1) (§ 15, 1re partie) au calcul du déplacement g_C. Dans cette formule, μ désigne le moment fléchissant que produirait, en chaque point de la pièce supposée assujettie seulement aux liaisons indépendantes de l'élasticité, un couple auxiliaire égal à l'unité, appliqué à la section C.

Il faut, comme précédemment, distinguer suivant que C se trouve entre A et E ou entre E et F.

(a) *Le point* C *est entre* A *et* E.

Dans ce cas, le moment μ a pour valeurs :

En tout point (xy) situé entre A et C : $\mu = 0$;
— — C et E : $\mu = -1$;
— — E et F : $\mu = -1 + \frac{x}{a}$;
— — F et B : $\mu = 0$.

Donc

$$g_C = \int_A^B \frac{M\mu}{EI}\,ds = \int_C^E -\frac{M\,ds}{EI} + \int_E^F -\frac{M\,ds}{EI} + \int_E^F \frac{M\,ds}{EI}\frac{x}{a}$$

ou

$$(c) \qquad g_C = -\left\{\int_C^F \frac{M\,ds}{EI} - \int_E^F \frac{M\,ds}{EI}\frac{x}{a}\right\}.$$

Digitized by Google

La première intégrale de la parenthèse représente la somme algébrique des forces fictives $\frac{M ds}{EI}$ réparties entre C et F, et la seconde, avec son signe, est égale à la réaction fictive en F.

Le 3° du théorème est donc démontré pour le cas où le point C se trouve entre A et E.

(b). — *Le point* C *se trouve entre* E *et* F.

Dans cette hypothèse, les valeurs de μ sont les suivantes :

En tout point (xy) situé entre A et E : $\mu = 0$.

— — E et C : $\mu = \frac{x}{a}$.

— — C et F : $\mu = \frac{x}{a} - 1$.

— — F et B : $\mu = 0$.

Par conséquent,

$$g_C = \int_A^B \frac{M\mu}{EI}\, ds = \int_E^C \frac{M ds}{EI}\,\frac{x}{a} + \int_C^F \frac{M ds}{EI}\,\frac{x}{a} - \int_C^F \frac{M ds}{EI},$$

ou, comme dans le cas où C est entre A et E,

$$(c) \qquad g_C = -\left\{\int_C^F \frac{M ds}{EI} - \int_E^F \frac{M ds}{EI}\,\frac{x}{a}\right\}.$$

COROLLAIRE. — *Pour déterminer le déplacement d'un point quelconque* C, *suivant une direction arbitrairement choisie* ox'' (fig. 1, p. 4), *faisant un angle* α *avec* W'W, *c'est-à-dire avec* ox, *on opérera de la manière suivante :*

(A) — *Si le point* C *est situé entre* A *et* F, *on amènera les forces fictives réparties entre* C *et* F, *ainsi que la réaction fictive en* F, *à être parallèles à* ox'', *au moyen d'une rotation rétrograde d'un angle* $(90° - \alpha)$ *autour de leurs points d'application respectifs, et on prendra la somme des moments de ces forces par rapport au point* C; ce qui peut se traduire par la formule

$$(l_{x''})_C = \overset{C.\overline{F}}{\underset{C}{M}} \overline{X''}\,\frac{M}{EI}\, ds.$$

(B) — *Si le point* C *est situé entre* B *et* E, *on amènera, comme précé-*

Digitized by Google

demment, les forces fictives réparties entre C *et* E, *ainsi que la réaction fictive en* E, *à être parallèles à ox″, et on prendra par rapport au point* C, *la somme des moments de ces forces, dont on changera le signe*; ce qui peut se traduire par la formule

$$(l_{x'})_C = -\overset{C.E}{\underset{C}{M_{X''}}} \frac{M}{EI}\, ds.$$

Nous ne ferons la démonstration que pour le cas (A).

On a évidemment

$$(l_{x'})_C = (l_y)_C \sin\alpha + (l_x)_C \cos\alpha.$$

D'ailleurs, $(l_y)_C$ et $(l_x)_C$ sont exprimés, quelle que soit la position de C sur AF, par les formules *(a)* et *(b)* établies plus haut. En substituant dans la relation qui précède, il vient

$$(l_{x'})_C = \int_C^F \frac{M ds}{EI} (-\xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha + x \sin\alpha - y \cos\alpha)$$

$$-(a \sin\alpha - \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha) \int_E^F \frac{M ds}{EI} \frac{x}{a}.$$

Or, si on désigne par x'', y'', les coordonnées courantes d'un point quelconque de la ligne moyenne et par ξ'', η'', les coordonnées du point C, relativement aux axes rectangulaires ox'', oy'', on a :

$$x'' = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \qquad \xi'' = \xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha;$$
$$y'' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha; \qquad \eta'' = -\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha;$$

Donc

$$(l_{x'})_C = \int_C^F \frac{M ds}{EI} (\eta'' - y'') - (a\sin\alpha + \eta'') \int_E^F \frac{M ds}{EI} \frac{x}{a}.$$

Cette expression représente précisément la somme des moments par rapport à C, des forces fictives $\frac{M ds}{EI}$ réparties entre C et F, et de la réaction fictive en F, laquelle a pour valeur $\int_E^F \frac{M ds}{EI} \frac{x}{a}$ et

Digitized by Google

dont le bras de levier est $(a \sin \alpha + \eta'')$, — étant entendu que ces forces et cette réaction fictives sont supposées avoir été rendues parallèles à ox''.

Nota. — Le théorème qui précède et son corollaire sont indépendants de la direction de WW' qui peut, par exemple, coïncider avec la droite E F.

§ 33. — Expressions symboliques des déformations dans le cas où les liaisons indépendantes de l'élasticité sont du second système.

THÉORÈME II. — *Étant donnée une pièce de ligne moyenne* AB (fig. 2), *soumise à des forces qui y développent des moments fléchissants* M, *et astreinte à des liaisons quelconques mais telles qu'on peut, par la suppression des liaisons surabondantes, la ramener à n'être plus assujettie qu'au second système de liaisons indépendantes de l'élasticité* (*) *(Section* E *encastrée), — si, ayant rapporté cette pièce à deux axes rectangulaires quelconques ox et oy, on applique aux divers éléments ds de la ligne moyenne, des forces fictives* $\frac{M}{EI}\,ds$, *parallèles à oy et dirigées dans le sens des y positifs, ou en sens inverse, suivant que* M *est positif ou négatif :*

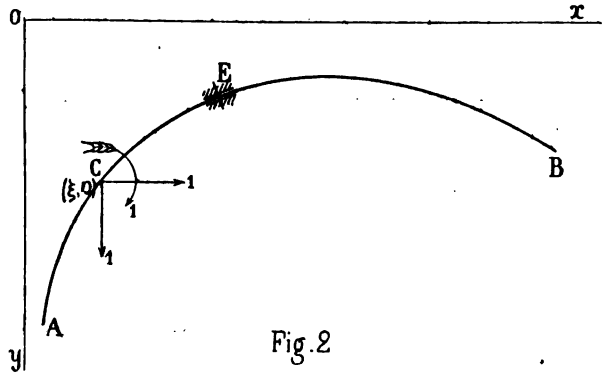


Fig. 2

(A). — *En tout point* C *situé entre* A *et* E :

1° La somme des moments par rapport à C, *des forces fictives réparties entre* C *et* E, *représente, en grandeur et en signe, le déplacement* $(l_y)_C$ *du point* C *estimé suivant la direction oy ;* de sorte qu'on a

$$(IV) \qquad (l_y)_C = \overset{C.E}{\underset{C}{MY}} \frac{M}{EI}\,ds.$$

(*) La figure ne représente que les liaisons indépendantes de l'élasticité.

Digitized by Google

2° *Si on fait tourner de 90° dans le sens rétrograde les forces fictives réparties entre* C *et* E, *la somme des moments de ces forces par rapport à* C *représente, en grandeur et en signe, le déplacement* $(l_x)_C$ *du point* C, *estimé suivant l'axe des* x; et l'on a par suite

$$(V) \qquad (l_x)_C = \overset{C.E}{\underset{C}{\mathfrak{M}X}} \frac{M}{EI}\, ds.$$

3° *La somme algébrique des forces réparties entre* C *et* E *représente, en grandeur et au signe près, le déplacement angulaire de la section* C; en sorte qu'on peut écrire

$$(VI) \qquad g_C = -\overset{C.E}{\underset{C}{T}} \frac{M}{EI}\, ds.$$

(B) — *Pour tout point* C *situé entre* E *et* B, *les propositions précédentes subsistent aux signes près*, de telle manière qu'on a

$$(IV\,bis) \qquad (l_y)_C = -\overset{C.E}{\underset{C}{\mathfrak{M}Y}} \frac{M}{EI}\, ds,$$

$$(V\,bis) \qquad (l_x)_C = -\overset{C.E}{\underset{C}{\mathfrak{M}X}} \frac{M}{EI}\, ds,$$

$$(VI\,bis) \qquad g_C = +\overset{C.E}{\underset{C}{T}} \frac{M}{EI}\, ds.$$

Nous n'établirons que la partie (A) du théorème; la partie (B) se démontre d'ailleurs de la même manière.

DÉMONSTRATION DU 1° DE LA PARTIE (A) DU THÉORÈME. — Appliquons la formule (A_1) (§ 15, 1re partie) à l'évaluation du déplacement $(l_y)_C$. Dans ce cas, μ désigne le moment fléchissant que produirait, en chaque point de la pièce supposée assujettie seulement aux liaisons indépendantes de l'élasticité, une force auxiliaire égale à l'unité, appliquée en C, dirigée parallèlement à oy et dans le sens des y positifs.

Soient ξ et η les coordonnées du point C par rapport aux axes ox et oy.

Le moment μ a les valeurs suivantes :

En tout point (xy) situé entre A et C : $\mu = 0$;
— — C et E : $\mu = x - \xi$;
— — E et B : $\mu = 0$.

Donc

$$(l_y)_C = \int_A^B \frac{M\mu}{EI}\, ds = \int_C^E \frac{M\,ds}{EI}\,(x - \xi),$$

Digitized by Google

expression qui représente bien la somme des moments, par rapport à C, des efforts fictifs $\frac{M ds}{EI}$ répartis entre C et E.

DÉMONSTRATION DU 2° DE LA PARTIE (A) DU THÉORÈME. — Appliquons encore la formule (A_1) à l'évaluation du déplacement $(l_x)_C$. Dans ce cas, la force auxiliaire est dirigée parallèlement à ox et dans le sens des x positifs. On a par suite :

En tout point (xy) situé entre A et C : $\mu = 0$.
— — C et E : $\mu = \eta - y$.
— — E et B : $\mu = 0$.

D'où

$$(l_x)_C = \int_A^B \frac{M\mu}{EI}\, ds = \int_C^E \frac{M ds}{EI}\,(\eta - y).$$

Cette expression représente bien la somme des moments, par rapport à C, des forces fictives réparties entre C et E, ces forces étant supposées avoir été rendues parallèles à ox, par une rotation rétrograde d'un angle de 90° autour de leurs points d'application respectifs (*).

DÉMONSTRATION DU 3° DE LA PARTIE (A) DU THÉORÈME. — Calculons par la formule (B_1) (§ 15, 1re partie) le déplacement angulaire g_C. μ désigne, dans ce cas, le moment fléchissant que produirait en chaque point de la ligne moyenne, un couple auxiliaire positif, d'intensité 1, appliqué à la section C. On a par suite :

En tout point (xy) situé entre A et C : $\mu = 0$.
— — C et E : $\mu = -1$.
— — E et B : $\mu = 0$.

Donc

$$g_C = \int_A^B \frac{M\mu}{EI}\, ds = -\int_C^E \frac{M ds}{EI},$$

formule qui justifie l'énoncé.

(*) Ce 2° résulte d'ailleurs immédiatement du 1°, puisque, la direction des axes de coordonnées étant arbitraire, on peut changer ox en oy et réciproquement.

Digitized by Google

34. — Construction des déformations dans le cas où les liaisons indépendantes de l'élasticité sont du premier système.

Soit AB la pièce donnée (*fig. 1*, pl. 200), assujettie à des liaisons quelconques mais telles que, par la suppression des liaisons surabondantes, on peut la ramener à n'être plus astreinte qu'aux liaisons du premier système, savoir : point F entièrement fixe et point E assujetti à rester sur une droite donnée WW'.

Des forces agissent sur cette pièce et déterminent des moments fléchissants M que nous supposons connus, et des déplacements élastiques que nous nous proposons de construire.

1° *Déplacements linéaires l_y perpendiculaires à* W'W. — Divisons la ligne moyenne de la pièce en un certain nombre de parties Δs égales entre elles, assez petites pour que, dans chacune d'elles, le moment fléchissant M ainsi que les quantités E et I puissent être considérés comme constants. Au milieu de chaque division, appliquons un effort fictif parallèle à *oy*, ayant pour intensité $\frac{M}{EI}\Delta s$ et dirigé dans le sens des *y* positifs ou en sens inverse, suivant que M est positif ou négatif. Soient 1, 2, ... 10, 11, ces efforts (*).

Traçons-en le polygone qui se réduit à une droite *aefb;* avec une distance polaire B arbitraire, que nous convenons de porter à gauche ou à droite du polygone des forces suivant qu'elle est positive ou négative, construisons le polygone funiculaire correspondant $A_y E_y F_y B_y$; menons à ce polygone la ligne de fermeture $E_y F_y$ qui le coupe en ses points d'intersection avec les ordonnées des points E et F. Enfin, par le pôle P du polygone des forces, conduisons une parallèle PQ à $E_y F_y$.

En vertu d'une propriété connue des polygones funiculaires, les lignes *f* Q et Q*e* représentent respectivement les réactions fictives R_F et R_E que développent en F et en E les forces fictives 4, 5.. 8, 9, réparties entre E et F, abstraction faite des forces fictives appliquées sur AE et sur FB.

Cela posé, d'après une autre propriété également connue, le moment par rapport à un point C quelconque, situé entre A et F, des forces fictives $\frac{M}{EI}\Delta s$ réparties entre C et F, et de la réaction

(*) Sur la figure, les efforts fictifs portent les mêmes numéros que leurs points d'application.

Digitized by Google

fictive en F, est égal, en grandeur et en signe, au produit de la distance polaire B par le segment $c_y C_y$ intercepté par le polygone funiculaire et par sa ligne de fermeture sur l'ordonnée du point C,— étant entendu que la distance polaire B est lue sur l'épure à l'échelle des efforts fictifs $\frac{M}{EI}\Delta s$, que le segment $c_y C_y$ est lu à l'échelle des longueurs, et qu'il est affecté du signe + ou du signe — suivant que C_y est au-dessous ou au-dessus de $a_y b_y$.

Or, en vertu du théorème I (§ 32) et à la substitution près des efforts fictifs élémentaires $\frac{M}{EI}\Delta s$ à ceux infiniment petits $\frac{M}{EI}ds$, le moment dont il s'agit est égal au déplacement $(l_y)_C$ du point C, estimé suivant l'axe des y. Donc

$$(l_y)_C = B \times c_y C_y.$$

On démontrerait de la même manière que cette relation est encore vraie lorsque le point C est situé entre F et B.

2° *Déplacements linéaires l_x parallèles à* W'W. — Faisons tourner de 90° dans le sens rétrograde, les efforts fictifs 1, 2, ... 11, ainsi que les réactions fictives R_F et R_E; le polygone de ces forces et les rayons polaires correspondants tournent du même angle; aux nouvelles positions 1',2', ... 11', de ces efforts, répond un nouveau polygone funiculaire $A_x F_x B_x$. Par le point F_x correspondant au point F, menons une parallèle $F_x a_x$ à P'Q'.

D'après une propriété déjà invoquée, le moment par rapport à un point C quelconque, situé entre A et F, des forces fictives réparties entre C et F et de la réaction fictive en F est égal au produit de la distance polaire B par le segment $c_x C_x$ intercepté par le polygone funiculaire et la ligne $F_x a_x$ sur l'abscisse du point C.

Or, en vertu du 2° du théorème I (§ 32) et à la substitution près des efforts fictifs élémentaires $\frac{M}{EI}\Delta s$ à ceux infiniment petits $\frac{M}{EI}ds$, ce moment est égal au déplacement $(l_x)_C$ du point C, estimé suivant la direction *ox* ou W'W. Donc

$$(l_x)_C = B \times c_x C_x,$$

étant entendu que la distance polaire B est lue sur l'épure à l'échelle des efforts fictifs, que le segment $c_x C_x$ est lu à l'échelle

Digitized by Google

des longueurs, et qu'il est affecté du signe + ou du signe —, suivant que C_x est à droite ou à gauche de $F_x b_x$.

On démontrerait de même que cette relation est vraie quand le point C est situé entre F et B.

3° *Déplacements angulaires g.* — Soient deux axes de coordonnées Qx_1 parallèle à WW', Qy_1 perpendiculaire. Par le point (1, 2), extrémité de l'effort fictif 1 et origine de l'effort 2, menons une parallèle à Qx_1 dont nous ne conservons que la partie comprise entre les lignes d'action de ces efforts. En répétant la même construction pour les points (2,3), (3,4) etc..., on obtient un diagramme dont une ordonnée quelconque $c_r C_r$, correspondante à un point C situé entre A et F, lue à l'échelle des $\frac{M}{EI}\Delta s$, représente la somme algébrique, changée de signe, des efforts fictifs répartis entre C et F et de la réaction fictive en F.

Or, cette somme changée de signe est égale, d'après le 3° du théorème I, à la rotation g_C de la section C. Donc

$$g_C = c_r C_r.$$

On vérifierait d'une manière analogue que cette formule s'applique encore au cas où le point C est situé entre F et B (*).

4° *Déplacements linéaires suivant une direction quelconque ox" faisant un angle α avec ox.* — Amenons les forces fictives 1,2 ... 11, et les réactions fictives R_E, R_F, à être parallèles à *ox"* par une rotation rétrograde d'un angle $(90° - \alpha)$ par rapport à leur direction première qui est celle de *oy*. La figure P*ef* tourne du même angle; soit P"*e"f"* sa nouvelle position.

Traçons le polygone funiculaire $A_{x"} B_{x"}$ correspondant, puis par le point $F_{x"}$ correspondant à F menons une parallèle $F_{x"} a_{x"}$ à P"Q".

On reconnaît aisément, en se fondant sur une propriété déjà utilisée et sur le corollaire du théorème I, que l'on a, en un point C quelconque,

$$(l_{x"})_C = B \times c_{x"} C_{x"}.$$

(*) On se rend facilement compte qu'il est plus exact de remplacer le diagramme qui vient d'être défini, par une courbe continue partant de A_r pour aboutir en B_r et coupant les côtés du diagramme en leurs points d'intersection avec les ordonnées des points de division de la ligne moyenne.

Digitized by Google

§ 35. — Construction des déformations dans le cas où les liaisons indépendantes de l'élasticité sont du second système.

Soit AB la pièce donnée (*fig.* 2, pl. 200), assujettie à des liaisons quelconques mais telles que, par la suppression des liaisons surabondantes, on peut la ramener à n'être plus astreinte qu'au second système de liaisons indépendantes de l'élasticité, savoir : section E assujettie à rester absolument fixe.

Des forces agissent sur cette pièce et y déterminent des moments fléchissants M que nous supposons connus, et des déplacements que nous nous proposons de construire.

1° *Déplacements linéaires* $(l_y)_C$ *estimés suivant une direction oy arbitrairement choisie.* — Divisons la ligne moyenne en un certain nombre de parties Δs, égales entre elles. Au centre de chaque division appliquons un effort fictif $\frac{M}{EI}\Delta s$, parallèle à *oy*, dirigé dans le sens des *y* positifs si M est positif, ou en sens inverse dans le cas contraire. Soient 1, 2 ..... 12, ces efforts.

Traçons-en le polygone *ab*. Prenons un pôle quelconque P; soit B la distance polaire correspondante que nous convenons de regarder comme positive ou comme négative, suivant que P est à gauche ou à droite de *ab*.

Puis, traçons le polygone funiculaire $A_y B_y$ relatif aux efforts 1,2, ... 12 et au pôle P. Enfin, prolongeons, suivant $a_y b_y$, le côté de ce polygone qui est compris entre les forces fictives 4 et 5 contiguës à l'encastrement.

D'après une propriété connue, le moment par rapport à un point C quelconque, situé entre A et E, des forces fictives réparties entre C et E, est égal, en grandeur et en signe, au produit de la distance polaire B par le segment $c_y C_y$ intercepté sur l'ordonnée du point C par le polygone funiculaire et la droite $a_y b_y$.

Or, en vertu du théorème II (§ 33), ce moment est égal au déplacement du point C estimé suivant *oy*. Donc

$$(l_y)_C = B \times c_y C_y,$$

étant bien entendu que B est lu sur l'épure à l'échelle des efforts fictifs $\frac{M}{EI}\Delta s$, que le segment $c_y C_y$ est lu à l'échelle des longueurs

Digitized by Google

et qu'il est affecté du signe + ou du signe —, suivant que C_y est situé au-dessous ou au-dessus de $a_y b_y$.

Même démonstration pour un point C′ situé entre E et B.

2° *Déplacements angulaires.* — Soient deux axes de coordonnées : l'un o_1x_1 perpendiculaire à oy et mené par le point (4, 5) contigu aux efforts fictifs 4 et 5 situés de part et d'autre de E; l'autre o_1y_1 parallèle à oy.

Par le point (1,2), extrémité de l'effort fictif 1 et origine de l'effort 2, menons une parallèle à o_1x_1, dont nous ne conservons que la partie comprise entre les lignes d'action de ces efforts. Répétons la même construction pour les points (2,3) (3,4) ... etc. Nous obtenons ainsi un diagramme dont une ordonnée quelconque c_rC_r correspondant à un point C situé entre A et E, représente, à l'échelle des efforts fictifs, la somme algébrique changée de signe des efforts fictifs répartis entre C et E.

Or, en vertu du 3° du théorème II, cette somme changée de signe est égale au déplacement angulaire de la section C. Donc :

$$g_C = c_r C_r.$$

Même démonstration pour un point C′ situé entre E et B.

§ 36. — Remarques sur la construction des déformations.

Lorsque la pièce considérée est d'élasticité constante, et c'est le cas usuel, au lieu d'effectuer les constructions des §§ 34 et 35 en partant d'efforts fictifs égaux à $\frac{M}{EI}\Delta s$, il est commode d'opérer sur des efforts proportionnels à ceux-ci et ayant la valeur générale

$$\frac{M}{EI}\Delta s\left(\frac{EI_m}{n\Delta s}\right) = M\left(\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}\right),$$

dans laquelle n et I_m sont des constantes.

n est un nombre quelconque.

I_m est le moment d'inertie d'une section arbitrairement choisie, la plus forte ou la plus faible par exemple.

M étant en général connu sous forme d'une ligne déterminée par une épure, on obtiendra facilement la quantité $M\left(\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}\right)$ par

Digitized by Google

la construction d'une quatrième proportionnelle entre la ligne en question, et deux autres lignes représentant $\frac{1}{n} I_m$ et I à une échelle convenablement choisie.

Les efforts fictifs $\frac{M}{EI} \Delta s$ étant changés en $M \left(\frac{\frac{1}{n} I_m}{I} \right)$, c'est-à-dire multipliés par le facteur constant $\frac{EI_m}{n \Delta s}$, les résultats des épures sont eux-mêmes multipliés par ce facteur ; d'où il suit que $B \times c_y C_y$, $B \times c_x C_x$ et $c_r C_r$ (§§ 34 et 35) ne représentent plus les quantités $(l_y)_C$, $(l_x)_C$ et g_C, mais ces mêmes quantités affectées du facteur constant en question. On a donc :

$$(l_y)_C = \frac{n \Delta s}{EI_m} B \times c_y C_y ; \quad (l_x)_C = \frac{n \Delta s}{EI_m} B \times c_x C_x ; \quad g_C = \frac{n \Delta s}{EI_m} \times c_r C_r ;$$

étant toujours entendu que les lignes $c_y C_y$ et $c_x C_x$ sont lues sur l'épure à l'échelle des longueurs, tandis que B et $c_r C_r$ sont lues à l'échelle des efforts fictifs employés, qui est précisément celle des moments M, puisque n est un nombre sans dimension et $\frac{I_m}{I}$ un rapport.

CHAPITRE II

Arc encastré à ses deux extrémités.

PREMIÈRE SECTION.

Forces extérieures fixes.

§ 37. — Méthode de détermination directe du moment fléchissant et des composantes, suivant deux directions rectangulaires quelconques, de la résultante de translation des forces intérieures en une section arbitrairement choisie. — Centre fixe de la travée. — Centres correspondants à une section.

Soit AB l'arc soumis à des forces extérieures quelconques, mais situées dans son plan, C le centre de gravité de la section consi-

Digitized by Google

dérée *(fig. 3)*. Les forces intérieures développées dans cette section, considérées comme actions du tronçon BC sur le tronçon AC, sont réductibles à un couple dont l'axe a pour valeur le moment de flexion M en C, et à une force dont nous désignerons par

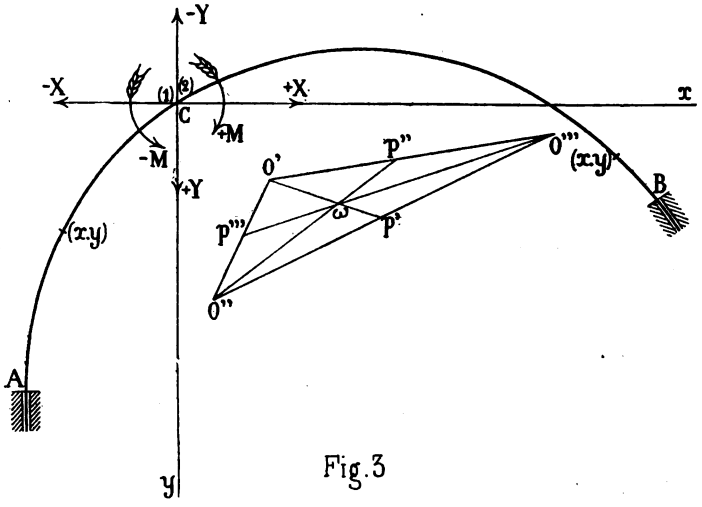


Fig.3

X et Y les composantes suivant deux directions rectangulaires C et C*y* arbitrairement choisies.

Ce sont les trois quantités M, X et Y que nous nous proposons de déterminer.

Imaginons qu'on coupe l'arc suivant la section C : les deux tronçons AC, BC vont se déformer et leurs extrémités respectives (1) et (2) ne resteront pas en contact. Si maintenant nous appliquons 1° à l'extrémité (1) du tronçon AC un couple + M et des forces + X et + Y, 2° à l'extrémité (2) du tronçon BC un couple — M et des forces — X et — Y, ces six efforts agissant, en tant que forces extérieures, sur les deux tronçons, auront pour effet de ramener en coïncidence les extrémités (1) et (2) et, par suite, de rendre à l'arc la forme qu'il affectait avant la coupure.

De là, résulte la méthode suivante pour la détermination de M, X et Y : on coupera l'arc en C, puis on calculera les déplacements linéaires et angulaires *absolus* des extrémités (1) et (2) des tronçons ainsi formés, sous l'action des forces extérieures données, et on en déduira les déplacements *relatifs* de ces extrémités. Cela fait, on appliquera 1° à l'extrémité (1), des efforts inconnus + M, + X, + Y, 2° à l'extrémité (2), des efforts — M, — X et — Y, égaux et contraires aux premiers. Enfin, on déterminera ces efforts en expri-

Digitized by Google

mant que les déplacements linéaire et angulaire relatifs par eux imprimés aux extrémités (1) et (2), sont égaux et contraires à ceux produits par les forces extérieures.

Soient :

g'_1, $(l'_x)_1$, $(l'_y)_1$ le déplacement angulaire absolu et les déplacements linéaires absolus en projection sur Cx et sur Cy, imprimés à la section (1) par celles des forces extérieures qui agissent sur le tronçon A (1) supposé séparé du reste de l'arc ;

g'_2, $(l'_x)_2$, $(l'_y)_2$, les déplacements similaires de la section (2), produits par celles des forces extérieures qui agissent sur le tronçon B (2).

Les déplacements, sous l'action des forces extérieures, de l'extrémité (2) *relativement* à l'extrémité (1), ont pour valeurs :

$$g'_2 - g'_1 ; \qquad (l'_x)_2 - (l'_x)_1 ; \qquad (l'_y) - (l'_y)_1 .$$

Soient de même :

g''_1, $(l''_x)_1$, $(l''_y)_1$ le déplacement angulaire absolu et les déplacements linéaires absolus estimés suivant Cx et Cy, qu'imprimeraient à l'extrémité (1) les efforts + M, + X, + Y, agissant seuls sur le tronçon A (1) supposé détaché du reste de la poutre ;

g''_2, $(l''_x)_2$, $(l''_y)_2$ les déplacements similaires qu'imprimeraient, à l'extrémité (2) du tronçon B (2), les efforts — M, — X, — Y, y appliqués.

Les déplacements, sous l'action simultanée de + M, + X, + Y, — M, — X, — Y, de l'extrémité (2) *relativement* à celle (1), ont pour valeurs :

$$g''_2 - g''_1 ; \qquad (l''_x)_2 - (l''_x)_1 ; \qquad (l''_y)_2 - (l''_y)_1 .$$

D'après ce qui a été dit précédemment, on doit poser :

$$(a) \qquad \begin{cases} g'_2 - g'_1 + g''_2 - g''_1 = 0, \\ (l'_x)_2 - (l'_x)_1 + (l''_x)_2 - (l''_x)_1 = 0, \\ (l'_y)_2 - (l'_y)_1 + (l''_y)_2 - (l''_y)_1 = 0. \end{cases}$$

Les déplacements entrant dans les équations (*a*) sont directement calculables par les formules données au théorème du § 33. Si, d'une manière générale, on désigne par M' les moments fléchissants produits par les forces extérieures données, dans les deux troncons A(1) et B(2) supposés indépendants l'un de l'autre, et par

Digitized by Google

M″ les moments fléchissants produits, soit dans le tronçon A par les efforts + M, + X, + Y agissant seuls, soit dans le tron B (2) par les efforts — M, — X, — Y agissant seuls, on a :

$$g'_1 = \overset{C.A}{\underset{C}{T}} \frac{M'}{EI}\,ds\,; \quad (l'_x)_1 = -\overset{C.A}{\underset{C}{MX}} \frac{M'}{EI}\,ds\,; \quad (l'_y)_1 = -\overset{C.A}{\underset{C}{MY}} \frac{M'}{EI}$$

$$g'_2 = -\overset{C.B}{\underset{C}{T}} \frac{M'}{EI}\,ds\,; \quad (l'_x)_2 = +\overset{C.B}{\underset{C}{MX}} \frac{M'}{EI}\,ds\,; \quad (l'_y)_2 = +\overset{C.B}{\underset{C}{MY}} \frac{M'}{EI}$$

D'où :

$$(b)\quad \begin{cases} g'_2 - g'_1 = -\overset{A.B}{\underset{C}{T}} \dfrac{M'}{EI}\,ds\,; \quad (l'_x)_2 - (l_x)_1 = \overset{A.B}{\underset{C}{MX}} \dfrac{M'}{EI}\,ds\,; \\ (l'_y)_2 - (l'_y)_1 = \overset{A.B}{\underset{C}{MY}} \dfrac{M'}{EI}\,ds\,; \end{cases}$$

et l'on trouverait de même :

$$(c)\quad \begin{cases} g''_2 - g''_1 = -\overset{A.B}{\underset{C}{T}} \dfrac{M''}{EI}\,ds\,; \quad (l''_x) - (l''_x)_1 = \overset{A.B}{\underset{C}{MX}} \dfrac{M''}{EI}ds\,; \\ (l''_y)_2 - (l''_y)_1 = \overset{A.B}{\underset{C}{MY}} \dfrac{M''}{EI}\,ds. \end{cases}$$

Or, le moment fléchissant produit en un point quelconque du tronçon A (1), par les efforts + M, + X, + Y appliqués en a pour valeur

$$M + Xy - Yx,$$

et le moment fléchissant développé en tout point (xy) du tro B (2), par les efforts — M, — X, — Y appliqués en (2), conser même expression.

On a donc, tout le long de l'arc AB,

$$M'' = M + Xy - Yx.$$

Substituant cette valeur de M″ dans les formules (c), il vien

$$(c')\quad \begin{cases} g''_2 - g''_1 = -\overset{A.B}{\underset{C}{T}} \dfrac{M}{EI}\,ds - \overset{A.B}{\underset{C}{T}} \dfrac{Xy}{EI}\,ds + \overset{A.B}{\underset{C}{T}} \dfrac{Yx}{EI}\,ds\,; \\ (l''_x)_2 - (l''_x)_1 = \overset{A.B}{\underset{C}{MX}} \dfrac{M}{EI}\,ds + \overset{A.B}{\underset{C}{MX}} \dfrac{Xy}{EI}\,ds - \overset{A.B}{\underset{C}{MX}} \dfrac{Yx}{EI}\,d \\ (l''_y)_2 - (l''_y)_1 = \overset{A.B}{\underset{C}{MY}} \dfrac{M}{EI}\,ds + \overset{A.B}{\underset{C}{MY}} \dfrac{Xy}{EI}\,ds - \overset{A.B}{\underset{C}{MY}} \dfrac{Yx}{EI}\,ds. \end{cases}$$

Digitized by Google

Dès lors, les équations (*a*) deviennent à cause de (*b*) et de (*c'*), en supprimant le facteur constant $\frac{1}{E}$:

$$(a')\begin{cases} \overset{A.B}{\underset{C}{T}} \frac{M'}{I}\,ds + \overset{A.B}{\underset{C}{T}} \frac{M}{I}\,ds + \overset{A.B}{\underset{C}{T}} \frac{Xy}{I}\,ds - \overset{A.B}{\underset{C}{T}} \frac{Yx}{I}\,ds = 0; \\ \overset{A.B}{\underset{C}{MX}} \frac{M'}{I}\,ds + \overset{A.B}{\underset{C}{MX}} \frac{M}{I}\,ds + \overset{A.B}{\underset{C}{MX}} \frac{Xy}{I}\,ds - \overset{A.B}{\underset{C}{MX}} \frac{Yx}{I}\,ds = 0; \\ \overset{A.B}{\underset{C}{MY}} \frac{M'}{I}\,ds + \overset{A.B}{\underset{C}{MY}} \frac{M}{I}\,ds + \overset{A.B}{\underset{C}{MY}} \frac{Xy}{I}\,ds - \overset{A.B}{\underset{C}{MY}} \frac{Yx}{I}\,ds = 0. \end{cases}$$

Ces équations expriment :

La première, que la somme algébrique des efforts fictifs parallèles $\frac{M'}{I}\,ds$, $\frac{M}{I}\,ds$, $\frac{Xy}{I}\,ds$, $-\frac{Yx}{I}\,ds$, est nulle ;

La seconde, que si l'on donne à ces efforts une direction commune parallèle à C*x*, la somme de leurs moments par rapport au point C est nulle ;

La troisième, que si on leur donne une direction parallèle à C*y*, la somme de leurs moments par rapport à C est nulle.

Il s'ensuit que ces forces fictives sont en équilibre *astatique*.

Il en est de même de leurs résultantes respectives, que nous désignerons par S, F', F'', F''', et qui ont pour valeurs :

$$(d)\begin{cases} S = \int_A^B \frac{M'}{I}\,ds, \qquad F' = M\int_A^B \frac{ds}{I} = \left(\frac{M}{b}\right)\varphi', \\ F'' = X\int_A^B \frac{y}{I}\,ds = X\varphi'', \quad F''' = -Y\int_A^B \frac{x}{I}\,ds = -Y\varphi''', \end{cases}$$

en posant

$$(e) \qquad \varphi' = \int_A^B \frac{b\,ds}{I}, \qquad \varphi'' = \int_A^B \frac{y}{I}\,ds, \qquad \varphi''' = \int_A^B \frac{x}{I}\,ds,$$

et en désignant par *b* une longueur arbitrairement choisie, dont l'introduction n'a d'autre but que de mettre en évidence, dans l'expression de F', le quotient $\left(\frac{M}{b}\right)$ qui représente une force, au lieu de la quantité M qui est un moment.

Digitized by Google

Les points d'application des trois dernières résultantes F', F'', F''', sont respectivement les centres des forces fictives parallè suivantes, réparties tout le long de l'arc : 1° $\frac{M}{I}\,ds$, 2° $\frac{Xy}{I}$ 3° $\frac{Yx}{I}\,ds$; ou, ce qui revient au même, des forces fictives s vantes : 1° $\frac{b}{I}\,ds$, 2° $\frac{y}{I}\,ds$, 3° $\frac{x}{I}\,ds$, qui sont proportionnel aux premières.

Soient o', o'', o''', ces centres (*fig. 3*, p. 22).

Leur position est indépendante des forces extérieures agiss sur l'arc.

Le centre o' reste fixe, quelle que soit la section C que l considère, puisque les forces fictives $\frac{b}{I}\,ds$, auxquelles il cor pond, ne dépendent ni d'x ni d'y. Nous l'appellerons *centre fix la travée.*

Les centres o'' et o''' varient de position lorsqu'on considère sections C différentes, puisque les valeurs $\frac{y}{I}\,ds$, $\frac{x}{I}\,ds$ des for fictives y relatives contiennent x et y. Nous les appellerons *cen correspondants à la section* C.

Quant au point d'application ω de la résultante S, qui est centre des efforts fictifs parallèles $\frac{M'}{I}\,ds$, sa position dépend sentiellement des forces extérieures appliquées à l'arc, puis M' est fonction desdites forces extérieures. Nous l'appeller *centre variable.*

Supposons qu'on ait déterminé, ainsi que nous l'indiquer plus loin :

1° La position des centres o', o'', o''' et les valeurs des i grales φ', φ'' et φ''', éléments indépendants des forces extérieure constants pour un arc et une section C donnés ;

2° La position du centre variable ω et la valeur de la résulta fictive S, éléments dépendants des forces extérieures.

Les résultantes fictives F', F'', F''', inconnues d'intensité, n appliquées aux centres o', o'', o''', connus, et la résultante fic S, connue d'intensité et appliquée au centre variable ω, ég ment connu, sont en équilibre astatique, comme il a été dit haut.

Joignons le centre variable ω aux centres o' o'' et

Digitized by Google

soient p', p'', p''' les points d'intersection de ces lignes avec les côtés du triangle $o'\,o''\,o'''$, respectivement opposés aux sommets o', o'' et o'''. On a, en vertu de la condition d'équilibre sus-indiquée,

$$\begin{aligned} &S \times p'\omega + F' \times p'o' = 0, \\ &S \times p''\omega + F'' \times p''o'' = 0, \\ &S \times p'''\omega + F''' \times p'''o''' = 0; \end{aligned} \qquad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{aligned} F' &= -S\,\frac{p'\omega}{p'o'}, \\ F'' &= -S\,\frac{p''\omega}{p''o''}, \\ F''' &= -S\,\frac{p'''\omega}{p'''o'''}; \end{aligned} \right.$$

et, à cause des trois dernières relations (d),

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{M}{b} &= -\frac{1}{\varphi'} \times \frac{p'\omega}{p'o'}\,S, \\ X &= -\frac{1}{\varphi''} \times \frac{p''\omega}{p''o''}\,S, \\ Y &= +\frac{1}{\varphi'''} \times \frac{p'''\omega}{p'''o'''}\,S. \end{aligned} \right.$$

Ces expressions font connaître les quantités cherchées M, X et Y.

§. 38. — Constructions auxquelles donne lieu l'application de la méthode.

Construction des centres o', o'', o''' et des intégrales φ', φ'' et φ'''. — Le *centre fixe* o' de la travée est le centre des forces fictives parallèles $\left(\frac{b}{I}\,ds\right)$, appliquées à chaque élément ds de la ligne moyenne de l'arc; on le déterminera donc par les règles de la composition des forces parallèles; voici comment :

Divisons la ligne moyenne en un certain nombre de parties égales de longueur Δs (*fig. 4*). Pour la recherche qui nous occupe, les forces infiniment petites $\left(\frac{b}{I}\,ds\right)$ peuvent être approximativement remplacées par des forces finies égales à $\left(\frac{b}{I}\,\Delta s\right)$, appliquées aux milieux des éléments Δs.

Soient, comme au § 36, n un nombre quelconque et I_m le moment d'inertie d'une section arbitrairement choisie de l'arc.

Digitized by Google

Les quantités n, I_m et Δs étant des constantes, on peut remplacer les forces fictives $\left(\frac{b}{I}\Delta s\right)$ par des forces égales à

$$\left(\frac{b}{I}\Delta s\right)\times\frac{\frac{1}{n}I_m}{\Delta s}=b\,\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$$

et qui leur sont proportionnelles.

Cela posé, traçons le polygone ab de ces forces considérées d'abord comme parallèles à l'axe des y; puis par un pôle P, de distance polaire B arbitrairement choisie, menons les rayons du

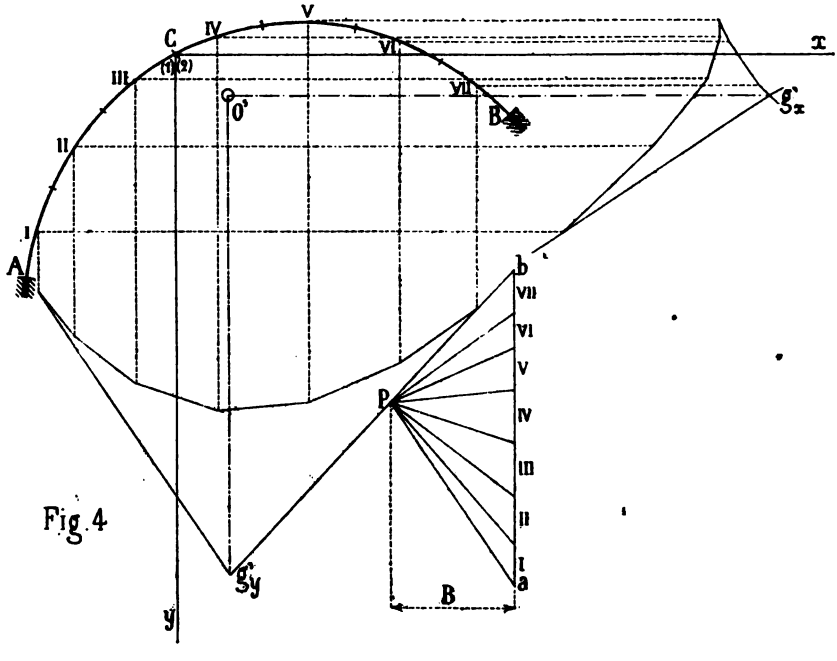


Fig. 4

polygone des forces; enfin, traçons le polygone funiculaire correspondant et prolongeons-en les côtés extrêmes jusqu'à leur point d'intersection g'_y.

En vertu d'une propriété connue, la parallèle à l'axe des y, menée par ce point, passe par le centre des forces parallèles considérées, c'est-à-dire par le centre fixe o' de la travée.

Si maintenant on fait tourner toutes ces forces de 90° autour de leurs points d'application respectifs, de manière à les amener à être parallèles à l'axe des x, et qu'on trace le nouveau polygone

Digitized by Google

funiculaire correspondant (*), puis qu'enfin on mène une parallèle à l'axe des x par le point d'intersection g'_z des côtés extrêmes de ce polygone funiculaire, le point de concours de cette droite et de la parallèle à l'axe des y précédemment déterminée est le centre fixe o' cherché.

La longueur totale du polygone des forces $b\,\frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I}$, c'est-à-dire de la droite ab, représente, à l'échelle des longueurs, la quantité suivante, que nous désignerons par Φ' :

$$\Phi' = \sum_A^B b\,\frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I} = \frac{I_m}{n\Delta s}\sum_A^B \frac{b}{I}\,\Delta s,$$

ou, à la substitution près des efforts fictifs infiniment petits $\frac{b}{I}\,ds$ aux efforts élémentaires $\frac{b}{I}\,\Delta s$,

$$(2) \qquad \Phi' = \frac{I_m}{n\Delta s}\int_A^B \frac{b}{I}\,ds = \frac{I_m}{n\Delta s}\,\varphi',$$

d'où l'on pourrait tirer φ'; mais il est inutile de dégager cette quantité, ainsi que nous le verrons plus loin.

Les centres o'' et o''' correspondants à la section C et les quantités φ'' et φ''' se déterminent de la même manière que le centre fixe o' et que la quantité φ'. Les forces fictives parallèles à faire intervenir dans les épures ont respectivement pour valeurs

$$y\,\frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I} \quad \text{et} \quad x\,\frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I}$$

Les longueurs totales des polygones de ces forces représentent, à l'échelle des longueurs, les quantités suivantes, que nous désignerons par Φ'' et Φ''' :

$$(3) \qquad \Phi'' = \frac{I_m}{n\Delta s}\int_A^B \frac{y}{I}\,ds = \frac{I_m}{n\Delta s}\,\varphi'',$$

(*) **Il faut observer que les côtés de ce polygone funiculaire sont respectivement perpendiculaires à ceux de mêmes rangs du polygone funiculaire précédemment déterminé ; on utilisera cette remarque pour le construire, ce qui évitera le tracé d'un nouveau polygone des forces.**

Digitized by Google

$$(4) \qquad \Phi''' = \frac{I_m}{n\Delta s} \int_A^B \frac{x}{I}\, ds = \frac{I_m}{n\Delta s}\ \varphi'''.$$

Remarque. — Telle que nous venons de l'indiquer, la détermination des centres o', o'', o''' exige, dans le cas le plus complexe où l'arc n'a pas d'axe de symétrie, la construction de six polygones funiculaires. On peut éviter le tracé d'un de ces polygones.

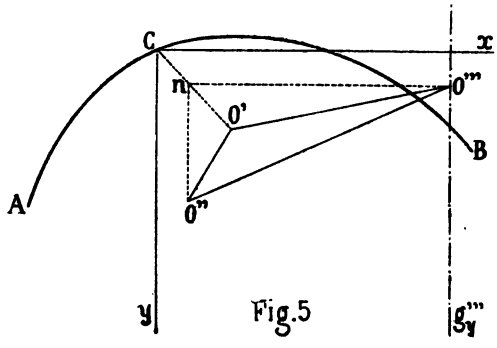


Fig.5

En effet, supposons qu'on ait déterminé, au moyen de cinq polygones funiculaires, les centres o' et o'' et la parallèle g^y à l'axe des y sur laquelle doit se trouver le centre o''' *(fig. 5)*.

Soient (c', d'), (c'', d''), (c''', d''') les coordonnées des centres o', o'', o''' par rapport aux axes Cx et Cy. Le théorème des moments appliqué aux forces fictives parallèles donne

$$c'' = \frac{\int_A^B \frac{y\,ds}{I}\, x}{\int_A^B \frac{y\,ds}{I}} = \frac{\int_A^B \frac{xy}{I}\, ds}{d' \int_A^B \frac{ds}{I}}, \qquad d''' = \frac{\int_A^B \frac{x\,ds}{I}\, y}{\int_A^B \frac{x\,ds}{I}} = \frac{\int_A^B \frac{xy}{I}\, ds}{c' \int_A^B \frac{ds}{I}};$$

d'où

$$\frac{c''}{d'''} = \frac{c'}{d'}.$$

Cette relation conduit à la construction suivante : joindre $o'C$, mener par o'' une parallèle $o''n$ à Cy ; par l'intersection n de cette parallèle avec $o'C$, mener à Cx une parallèle qui coupe la droite g'''_y au centre o''' cherché.

Construction du centre variable ω et de l'intégrale $S = \int_A^B \frac{M'}{I}\, ds.$

On commencera par chercher les valeurs des moments fléchissants M' que les forces extérieures données produiraient dans les deux tronçons A (1), B (2) de l'arc supposé coupé suivant la sec-

Digitized by Google

tion C, c'est-à-dire au point (1, 2). Ces moments sont statiquement déterminés, puisque chaque tronçon n'est assujetti à aucune liaison surabondante. On les obtiendra donc facilement, soit par un calcul simple, soit par un tracé d'ailleurs connu (*).

Ceci fait, la construction du centre variable ω s'effectuera absolument comme celle des centres o', o'' et o'''; les forces fictives parallèles à considérer dans l'épure sont égales à $M' \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$.

La longueur totale du polygone correspondant à ces forces représente la quantité suivante que nous désignerons par Σ :

$$\Sigma = \frac{I_m}{n\Delta s} \int_A^B \frac{M'}{I}\, ds = \frac{I_m}{n\Delta s} S. \tag{5}$$

Détermination des inconnues $\frac{M}{b}$, X et Y. — Dans les équations (1) (page 27) remplaçons φ', φ'', φ''' et S par les quantités Φ', Φ'', Φ''' et Σ qui, en vertu des formules (2), (3), (4) et (5), leur sont proportionnelles; il vient :

$$\begin{cases} \frac{M}{b} = -\frac{p'\omega}{p'o'} \times \frac{\Sigma}{\Phi'}, \\ X = -\frac{p''\omega}{p''o''} \times \frac{\Sigma}{\Phi''}, \\ Y = +\frac{p'''\omega}{p'''o'''} \times \frac{\Sigma}{\Phi'''}. \end{cases} \tag{1 bis}$$

Φ', Φ'', Φ''' étant, d'après ce qui précède, des sommes de quantités de la forme $b \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, $y \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, $x \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, doivent être regardés comme des *longueurs*, puisque b, y, x sont également des *longueurs* et que les éléments $\frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ sont des *rapports sans dimension*.

(*) Si, dans ce tracé qui, dans le cas où les forces extérieures données sont parallèles, consiste en la construction d'un polygone funiculaire correspondant à ces forces, on prend pour distance polaire une longueur égale sur l'épure à $\overline{A}$ mètres, pour échelle des forces une fraction $\frac{1}{f}$ et pour échelle des longueurs une fraction $\frac{1}{l}$ on obtient les moments M à l'échelle $\frac{1}{m} = \frac{1}{\overline{A} f l}$.

Digitized by Google

C'est donc à l'échelle des longueurs qu'on devra lire sur l'épure les grandeurs des droites qui représentent Φ', Φ'' et Φ'''.

De même, Σ étant la somme des quantités $M' \frac{\frac{1}{n}\, I_m}{I}$ doit être considéré comme un *moment*, puisque les M' sont également des *moments*. C'est donc à l'échelle des moments qu'on devra lire sur l'épure la grandeur de la droite qui représente Σ.

Quant à $p'\omega$, $p''\omega$, $p'''\omega$, $p'o'$, $p''o''$, $p'''o'''$, ce sont des longueurs qu'on relèvera comme telles sur l'épure.

Après avoir lu sur les épures toutes les quantités dont nous venons de parler, il suffira de les substituer dans les formules (*1 bis*) pour obtenir les inconnues cherchées.

Une fois M, X et Y connus, les moments fléchissants, les tensions longitudinales et les efforts tranchants produits par les forces extérieures données, dans l'arc encastré à ses deux extrémités, se détermineront en fonction de ces forces et des quantités M, X et Y, par les seuls procédés de la statique. Il n'y a pas lieu d'insister sur ce point. .

§ 39.—Détermination directe du moment fléchissant, de la tension longitudinale et de l'effort tranchant en une section arbitrairement choisie.

On remarquera qu'on est absolument maître de la direction à donner aux deux axes rectangulaires Cx et Cy, auxquels on doit rapporter la ligne moyenne de l'arc. On peut, en particulier, mener Cx tangentiellement à la ligne moyenne au point C et Cy normalement.

Dans ce cas, les composantes X et Y deviennent, la première, la tension longitudinale, la seconde, l'effort tranchant en C.

La méthode que nous venons d'exposer fournit donc le moyen de déterminer *directement* le moment fléchissant, la tension longitudinale et l'effort tranchant produits dans une section arbitrairement choisie de l'arc, par des forces quelconques situées dans le plan de la ligne moyenne.

§ 40. — Détermination directe des réactions aux encastrements.

La méthode indiquée plus haut s'applique à n'importe quelle section de l'arc; si on choisit, par exemple, l'une des sections

Digitized by Google

encastrées A ou B, on obtiendra directement le moment d'encastrement et les composantes, suivant telles directions rectangulaires qu'on voudra, de la réaction totale de l'encastrement.

DEUXIÈME SECTION

Charges mobiles. — Lignes d'influence.

§ 41. — Indications préliminaires.

La détermination des effets produits par le passage d'un convoi, sur une construction quelconque, se ramène au tracé de certaines lignes, dites *lignes d'influence*, et dont la définition ressort des indications suivantes.

Considérons, par exemple, un arc AB de forme quelconque, encastré ou articulé à ses extrémités *(fig. 6)*. Une charge P le par-

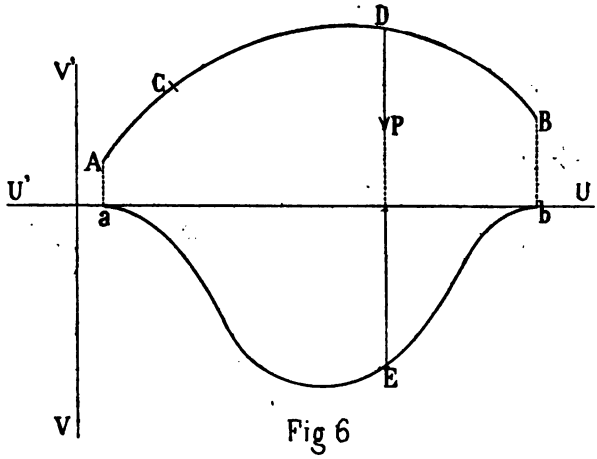


Fig 6

court. A toute position D de cette charge correspond une valeur déterminée de la poussée ; portons-la en ordonnée sur la verticale du point D, à partir d'une horizontale quelconque UU', prise pour axe des abscisses ; soit E l'extrémité de cette ordonnée : le lieu des points E est la *ligne d'influence de la poussée.*

De même, à chaque position de la charge mobile répondent, en une section C arbitrairement choisie, des valeurs déterminées du moment fléchissant M et des composantes X et Y de la résultante de translation des efforts intérieurs en cette section ; si on porte ces valeurs en ordonnées, ainsi que nous venons de l'indiquer

Digitized by Google

pour la poussée, on obtient trois points dont les lieux sont respectivement les lignes d'influence des quantités M, X et Y, afférentes à la section C.

Nous exposerons dans ce chapitre une méthode de construction des lignes d'influence relatives aux arcs encastrés aux naissances, lignes qu'on utilisera conformément aux règles générales indiquées par M. Maurice Lévy (*Statique graphique*, IIe partie, page 39), pour la détermination des effets produits par le passage d'un convoi quelconque donné.

§ 42. — Expressions nouvelles du moment fléchissant M et des composantes X et Y de la résultante de translation des forces intérieures développées en une section C arbitrairement choisie.

Dans les équations (*a*) du § 37, effectuons les substitutions qu'autorisent les formules (*c'*) du même paragraphe, et chassons le dénominateur constant E; il vient :

$$(f)\begin{cases} \overset{A.B}{\underset{C}{T}}\frac{M}{I}\,ds+\overset{A.B}{\underset{C}{T}}\frac{Xy}{I}\,ds+\overset{A.B}{\underset{C}{T}}\left(-\frac{Yx}{I}\,ds\right)-E\,(g'_2-g'_1)=0,\\ \overset{A.B}{\underset{C}{MX}}\frac{M}{I}\,ds+\overset{A.B}{\underset{C}{MX}}\frac{Xy}{I}\,ds+\overset{A.B}{\underset{C}{MX}}\left(-\frac{Yx}{I}\,ds\right)+E\left[(l'_x)_2-(l'_x)_1\right]=0,\\ \overset{A.B}{\underset{C}{MY}}\frac{M}{I}\,ds+\overset{A.B}{\underset{C}{MY}}\frac{Xy}{I}\,ds+\overset{A.B}{\underset{C}{MY}}\left(-\frac{Yx}{I}\,ds\right)+E\left[(l'_y)_2-(l'_y)_1\right]=0. \end{cases}$$

Les trois premiers termes de la première des équations précédentes représentent la somme algébrique des forces parallèles $\frac{M}{I}\,ds$, $\frac{Xy}{I}\,ds$ et $-\frac{Yx}{I}\,ds$, appliquées tout le long de l'arc.

Les trois premiers termes de la seconde équation représentent la somme des moments, par rapport au point C (*fig. 3*, p. 22), de ces mêmes forces, supposées dirigées parallèlement à l'axe C*x* et dans le sens de C vers *x* ou en sens contraire, suivant qu'elles sont positives ou négatives.

Les trois premiers termes de la troisième équation représentent la somme des moments par rapport à C desdites forces, supposées dirigées parallèlement à l'axe C*y* et dans le sens positif ou dans le sens négatif de cet axe, suivant qu'elles sont positives ou négatives.

Nous avons désigné au § 37 par F', F'', F''' les intensités des

Digitized by Google

résultantes respectives des forces fictives $\frac{M}{I}ds$, $\frac{Xy}{I}ds$, $-\frac{Yx}{I}ds$, et nous avons appelé *centres* les points d'application o', o'', o''' de ces résultantes.

Soient (c',d'), (c'',d''), (c''',d''') les coordonnées de ces centres par rapport aux axes Cx et Cy.

En remplaçant dans les équations (f), les forces fictives et leurs moments, en fonction de leurs résultantes et des moments de ces résultantes, on obtient

$$(g)\qquad \begin{cases} F' + F'' + F''' = +E(g'_2 - g'_1), \\ d'F' + d''F'' + d'''F''' = +E\left[(l'_x)_2 - (l'_x)_1\right], \\ c'F' + c''F'' + c'''F''' = -E\left[(l'_y)_2 - (l'_y)_1\right]. \end{cases}$$

Résolvant en F', F'' et F''', il vient

$$(h)\qquad \begin{cases} F' = \dfrac{-E\left[(l'_x)_2 - (l'_x)_1\right](c'-c'') + E\left[(l'_y)_2 - (l'_y)_1\right](d''-d''') + E(g'_2 - g'_1)(c''d''' - c'''d'')}{\Delta} \\ F'' = \dfrac{-E\left[(l'_x)_2 - (l'_x)_1\right]c''' - c') + E\left[(l'_y)_2 - (l'_y)_1\right](d'-d''') + E(g'_2 - g'_1)(c'''d' - c'd''')}{\Delta} \\ F''' = \dfrac{-E\left[(l'_x)_2 - (l'_x)_1\right](c'-c'') + E\left[(l'_y)_2 - (l'_y)_1\right](d'-d'') + E(g'_2 - g'_1)(c'd'' - c''d')}{\Delta} \end{cases}$$

Le dénominateur commun Δ de ces formules a pour expression

$$(i)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c' & c'' & c''' \\ d' & d'' & d''' \end{vmatrix} = c'd'' + c''d''' + c'''d - c'd''' - c''d' - c'''d''.$$

Or, on vérifie aisément, par des considérations géométriques, que

$$(j)\qquad \Delta = \pm 2 \times \text{Surface } o'o''o'''.$$

Le signe + correspond au cas où les points o' o'' o''' sont tellement disposés que le sens du cheminement o' o'' o''' soit celui de la rotation des aiguilles d'une montre (*fig.* 7), et le signe — correspond au cas contraire (*fig.* 8).

Par les points o', o'', o''', menons des parallèles à l'axe des y jusqu'à leurs intersections q', q'', q''', avec les côtés opposés du triangle o', o'', o''', prolongés s'il est nécessaire.

Une quelconque de ces parallèles sera considérée comme positive lorsqu'un mobile la parcourant de l'extrémité portant la lettre o à celle portant la lettre q, se dirigera dans le sens des y

Digitized by Google

positifs, et comme négative lorsque ce mobile se dirigera dans le sens des y négatifs.

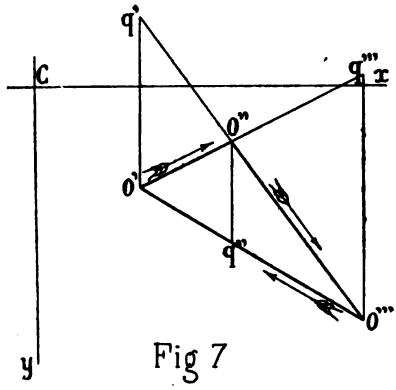


Fig 7

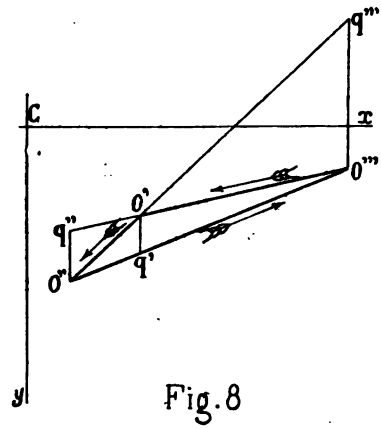


Fig. 8

L'examen des figures (7) et (8) montre immédiatement qu'eu égard à la convention qui précède, on a

$$(k)\left\{\begin{array}{l} 2\times \text{surface } o'o''o''' = \pm (c''-c''')\times o'q' = \pm (c'''-c')\times o''q'' \\ \qquad\qquad = \pm (c'-c'')\times o'''q''', \end{array}\right.$$

les signes + correspondant au cas où les points $o'o''o'''$ sont situés de telle manière que le sens du cheminement $o'o''o'''$ soit celui des aiguilles d'une montre, et les signes — correspondant au cas contraire.

En rapprochant les égalités (j) et (k), il vient

$$(l)\quad \Delta = (c''-c''')\times o'q' = (c'''-c')\times o''q'' = (c'-c'')\times o'''q''',$$

quel que soit le sens du cheminement $o'o''o'''$.

Substituons ces expressions de Δ dans les formules (h) et remplaçons en même temps F', F'' et F''' par leurs valeurs données par les relations (d) du § 37; nous obtenons après réductions

$$(6)\left\{\begin{array}{l} (d'q')\mathfrak{p}'\dfrac{M}{b} = -E\Big[(\gamma'_x)_2-(\gamma'_x)_1\Big]+\dfrac{d''-d'}{c''-c'}E\Big[(\gamma'_y)_2-(\gamma'_y)_1\Big]+\dfrac{c''d''-c''d'}{c''-c'}E\Big[g'_2-g'_1\Big], \\ (o'q')\mathfrak{p}'X = -E\Big[(\gamma'_x)_2-(\gamma'_x)_1\Big]+\dfrac{d''-d''}{c''-c'}E\Big[(\gamma'_y)_2-(\gamma'_y)_1\Big]+\dfrac{c''d''-c'd''}{c''-c'}E\Big[g'_2-g'_1\Big], \\ -(o''q'')\mathfrak{p}''Y = -E\Big[(\gamma'_x)_2-(\gamma'_x)_1\Big]+\dfrac{d''-d'}{c'-c''}E\Big[(\gamma'_y)_2-(\gamma'_y)_1\Big]+\dfrac{c'd''-c''d'}{c'-c''}E\Big[g'_2-g'_1\Big]. \end{array}\right.$$

Ces formules font connaître les valeurs du moment fléchissant M et des composantes X et Y, suivant deux directions rectangulaires arbitrairement choisies, de la résultante des forces intérieures en la section C, en fonction des constantes de l'arc et des

Digitized by Google

déplacements que prendraient, sous l'action des forces extérieures données, les sections extrêmes (1) et (2) des tronçons A (1) et B (2) de l'arc supposé coupé en C.

On remarquera que les équations (6) restent exactes lorsque les déplacements précités sont le résultat de dilatations ou de contractions produites par des variations de température.

§ 43. — Expressions du moment fléchissant et des composantes horizontale et verticale de la résultante de translation des efforts intérieurs produits en une section donnée de l'arc, par le passage d'une charge mobile. — Les efforts fictifs $\frac{y-z'}{I}ds$, $\frac{y-z''}{I}ds$, $\frac{y-z'''}{I}ds$. — Théorème relatif aux lignes d'influence.

Soit P la charge mobile; nous nous proposons de déterminer le moment fléchissant M et les composantes horizontale et verticale X et Y de la résultante des efforts intérieurs développés par la charge P, en une section C arbitrairement choisie (*fig. 9*)

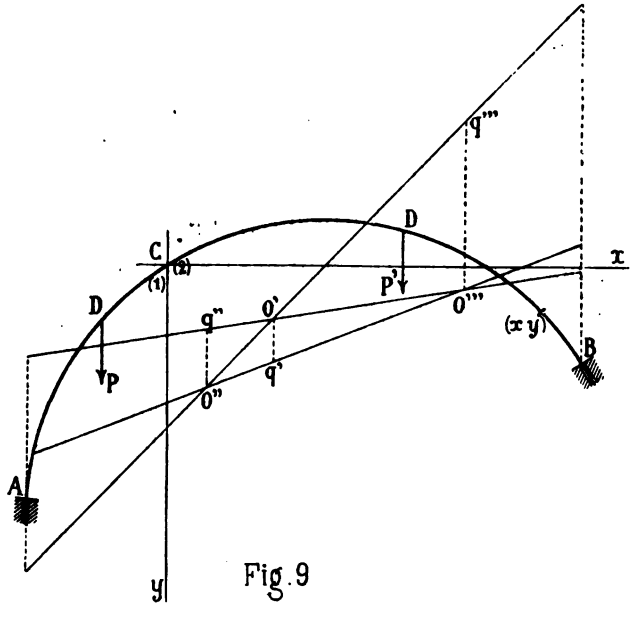


Fig. 9

Les directions attribuées aux composantes X et Y imposent celles des axes Cx et Cy auxquels il convient, comme précédemment, de rapporter la ligne moyenne de l'arc : Cx sera donc horizontal et Cy vertical.

Digitized by Google

Appliquons à la détermination de M, X et Y les formules finales (6) du § 42.

A cet effet, calculons les termes inconnus $(l'_x)_1 (l'_x)_2 \ldots g'_2$ des seconds membres, c'est-à-dire les déplacements linéaires et angulaires absolus que les forces extérieures, qui se réduisent ici au poids mobile, imprimeraient aux sections (1) et (2) des tronçons A (1) et B (2) de l'arc supposé coupé en C.

Il y a lieu de distinguer suivant que la charge mobile se trouve sur le tronçon B (2) ou, au contraire, sur le tronçon A (1).

1° *La charge mobile se trouve sur le tronçon* B (2).

Soit, à un instant donné, D le point d'application de la charge mobile P sur le tronçon considéré.

Le tronçon A (1) ne supportant aucune charge n'est pas déformé, en sorte que

$$(a) \qquad (l'_x)_1 = 0, \quad (l'_y)_1 = 0, \quad g'_1 = 0.$$

Il reste à calculer $(l'_x)_2$, $(l'_y)_2$ et g'_2, déplacements linéaires et angulaire produits en (2) par le poids P appliqué en D, et que nous représenterons aussi par $(l_x)^D_2$, $(l_y)^D_2$ et g^D_2, pour rentrer dans un système de notations déjà usité (1re partie).

En vertu du premier théorème de réciprocité (§ 6), le déplacement horizontal $(l_x)^D_2$, produit en (2) par la charge P appliquée en D, est égal au déplacement vertical $(l_y)^2_D$ qu'imprimerait au point D une force horizontale égale à + P, appliquée à l'extrémité (2) du tronçon B (2); c'est-à-dire que

$$(l'_x)_2 = (l_x)^D_2 = (l_y)^2_D.$$

Or, cette force horizontale + P développerait, en chaque point (xy) du tronçon B (2), ou BC, un moment fléchissant égal à — Py. Par conséquent, on a, d'après la formule (IV) du § 33,

$$(l_y)^2_D = \overset{D.B}{\underset{D}{M}} Y \frac{-Py}{EI} ds = -\frac{P}{E} \overset{D.B}{\underset{D}{M}} Y \frac{y}{I} ds.$$

Donc finalement

$$(b) \qquad (l'_x)_2 = -\frac{P}{E} \overset{D.B}{\underset{D}{M}} Y \frac{y}{I} ds.$$

De même, et toujours en vertu du premier théorème de réciprocité, le déplacement vertical $(l_y)^D_2$, produit en (2) par la charge

Digitized by Google

P appliquée en D, est égal au déplacement vertical $(l_y)^2_D$ qu'imprimerait au point D une force verticale + P, appliquée à l'extrémité (2) du tronçon B (2) ; c'est-à-dire que

$$(l'_y)_2 = (l_y)^D_2 = (l_y)^2_D.$$

Or, cette force verticale + P développerait, en chaque point (xy) du tronçon B (2), ou BC, un moment fléchissant égal à + Px ; par suite, d'après la formule (IV) du § 33,

$$(l_y)^2_D = \overset{D.B}{\underset{D}{M}} Y \frac{+Px}{EI} ds = +\frac{P}{E} \overset{D.B}{\underset{D}{M}} Y \frac{x}{I} ds.$$

Donc enfin

$$(c) \qquad (l'_y)_2 = +\frac{P}{E} \overset{D.B}{\underset{D}{M}} Y \frac{x}{I} ds.$$

En vertu du second théorème de réciprocité (§ 7), le déplacement angulaire g^D_2, imprimé à la section (2) par la charge P appliquée en D, est égal au déplacement vertical $(l_y)^2_D$ qu'imprimerait au point D un couple égal à + P, appliqué à la section extrême (2) du tronçon B (2) ; c'est-à-dire que

$$g'_2 = g^D_2 = (l_y)^2_D.$$

Or, ce couple + P produirait, en chaque point (xy) du tronçon B (2), ou BC, un moment fléchissant égal à — P ; par conséquent, d'après la formule (IV) du § 33,

$$(l_y)^2_D = \overset{D.B}{\underset{D}{M}} Y \frac{-P}{EI} ds = -\frac{P}{E} \overset{D.B}{\underset{D}{M}} Y \frac{ds}{I}.$$

Donc finalement

$$(d) \qquad g'_2 = -\frac{P}{E} \overset{D.B}{\underset{D}{M}} Y \frac{ds}{I}.$$

2° *La charge mobile se trouve sur le tronçon* A (1).

Dans cette hypothèse le tronçon B (2) n'est pas déformé, en sorte que

$$(a') \qquad (l'_x)_2 = 0, \quad (l'_y)_2 = 0, \quad g'_2 = 0.$$

$(l'_x)_1$, $(l'_y)_1$ et g'_1 se calculent par la méthode qui vient d'être suivie pour l'évaluation des déplacements $(l'_x)_2$, $(l'_y)_2$ et g'_2 de l'extré-

Digitized by Google

mité (2) du tronçon B (2), lorsque c'est ce dernier qui porte la charge mobile. On trouve :

$$(b') \qquad (l'_x)_1 = -\frac{P}{E}\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y\frac{y}{I}\,ds,$$

$$(c') \qquad (l'_y)_1 = +\frac{P}{E}\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y\frac{x}{I}\,ds,$$

$$(d') \qquad g'_1 = -\frac{P}{E}\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y\frac{ds}{I},$$

D étant toujours le point d'application de la charge.

En portant successivement dans les équations (6) du § 42, les valeurs simultanées des déplacements, données 1° par les formules (a), (b), (c), (d), 2° par les formules (a'), (b'), (c'), (d'), on a :

1° *Lorsque la charge mobile se trouve sur la partie d'arc* B (2), *ou* BC.

$$(7)\quad \begin{cases} (o'q')\,\varphi'\,\dfrac{M}{b} = P\overset{D.B}{\underset{D}{M}}Y\left[y - \dfrac{-(d'''-d'')x + c''d''' - c'''d''}{c''-c'''}\right]\dfrac{ds}{I}, \\ (o''q'')\,\varphi''\,X = P\overset{D.B}{\underset{D}{M}}Y\left[y - \dfrac{-(d'-d''')x + c'''d' - c'd'''}{c'''-c'}\right]\dfrac{ds}{I}, \\ -(o'''q''')\,\varphi'''\,Y = P\overset{D.B}{\underset{D}{M}}Y\left[y - \dfrac{-(d''-d')x + c'd'' - c''d'}{c'-c''}\right]\dfrac{ds}{I}. \end{cases}$$

2° *Lorsque la charge mobile se trouve sur la partie d'arc* A (1), *ou* AC.—

$$(7')\quad \begin{cases} (o'q')\,\varphi'\,\dfrac{M}{b} = -P\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y\left[y - \dfrac{-(d'''-d'')x + c''d''' - c'''d''}{c''-c'''}\right]\dfrac{ds}{I}, \\ (o''q'')\,\varphi''\,X = -P\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y\left[y - \dfrac{-(d'-d''')x + c'''d' - c'd'''}{c'''-c'}\right]\dfrac{ds}{I}, \\ -(o'''q''')\,\varphi'''\,Y = -P\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y\left[y - \dfrac{-(d''-d')x + c'd'' - c''d'}{c'-c''}\right]\dfrac{ds}{I}. \end{cases}$$

Posons

$$(8)\quad \begin{cases} z' = -\dfrac{d'''-d''}{c''-c'''}x + \dfrac{c''d'''-c'''d''}{c''-c'''}, \\ z'' = -\dfrac{d'-d'''}{c'''-c'}x + \dfrac{c'''d'-c'd'''}{c'''-c'}, \\ z''' = -\dfrac{d''-d'}{c'-c''}x + \dfrac{c'd''-c''d'}{c'-c''} \end{cases}$$

il vient

Digitized by Google

1° *Lorsque la charge mobile se trouve sur la partie d'arc* BC :

$$(9)\quad \begin{cases} (o'q')\,\varphi'\,\dfrac{M}{b} = P\overset{D.B}{\underset{D}{M}}Y\,\dfrac{y-z'}{I}\,ds, \\ (o''q'')\,\varphi''\,X = P\overset{D.B}{\underset{D}{M}}Y\,\dfrac{y-z''}{I}\,ds, \\ -(o'''q''')\,\varphi'''\,Y = P\overset{D.B}{\underset{D}{M}}Y\,\dfrac{y-z'''}{I}\,ds. \end{cases}$$

2° *Lorsque la charge mobile se trouve sur la partie d'arc* AC :

$$(9')\quad \begin{cases} (o'q')\,\varphi'\,\dfrac{M}{b} = -P\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y\,\dfrac{y-z'}{I}\,ds, \\ (o''q'')\,\varphi''\,X = -P\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y\,\dfrac{y-z''}{I}\,ds, \\ -(o'''q''')\,\varphi'''\,Y = -P\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y\,\dfrac{y-z'''}{I}\,ds. \end{cases}$$

Si l'on regarde z', z'' et z''' comme des ordonnées répondant aux abscisses x, on voit que les équations (8) représentent trois droites :

La première passe par les centres o'' et o''' (*fig. 9*), car son équation est satisfaite : 1° si on y fait $x = c''$, $z' = d''$; 2° si on y fait $x = c'''$, $z' = d'''$. Et on vérifie de même que la seconde passe par les centres o' et o''', tandis que la troisième passe par o' et o''.

Par suite, $(y - z')$, $(y - z'')$, $(y - z''')$ sont les segments d'ordonnées, — autrement dit de verticales, — compris respectivement entre les droites $o''o'''$, $o'o'''$, $o'o''$ et la ligne moyenne de l'arc, ces segments étant comptés positivement pour les tronçons de ligne moyenne situés au-dessous de ces droites et négativement pour ceux situés au-dessus.

Dès lors, en remarquant que les quantités $(o'q')$, $(o''q'')$, $(o'''q''')$, φ', φ'', φ''' et b sont des constantes pour la section C considérée, et en se rappelant que D désigne le point d'application de la charge mobile, on traduit immédiatement comme suit les équations (9) et (9') :

THÉORÈME I. — *Étant donnés un arc* AB *encastré à ses extrémités, parcouru par une charge mobile, et une section transversale* C *arbitrairement choisie, si on applique successivement des forces fictives verticales,* 1° $\dfrac{y-z'}{I}\,ds$, 2° $\dfrac{y-z''}{I}\,ds$, 3° $\dfrac{y-z'''}{I}\,ds$, *tout le long de la ligne moyenne, — les quantités* $y-z'$, $y-z''$, $y-z'''$ *étant respectivement*

Digitized by Google

les segments de verticales compris entre la dite ligne et les côtés o''o''', o'o''', o'o'' du triangle formé par le centre fixe o' de la travée et les centres o'' et o''' correspondants à la section C :

1° — (a) *La somme des moments, par rapport à un point quelconque* D *situé entre la section* C *et la retombée* B, *des forces fictives* $\frac{y-z'}{I}\,ds$ *réparties entre ce point et le point* B, *est proportionnelle au moment fléchissant que la charge mobile produit en* C *lorsqu'elle passe en* D.

(b) *La somme des moments, par rapport à un point quelconque* D *situé entre la section* C *et la retombée* A, *des forces fictives* $\frac{y-z'}{I}\,ds$ *réparties entre ce point et le point* A, *est proportionnelle au moment fléchissant que la charge mobile produit en* C *lorsqu'elle passe en* D.

2° — (a) *La somme des moments, par rapport à un point quelconque* D *situé entre la section* C *et la retombée* B, *des forces fictives* $\frac{y-z''}{I}\,ds$ *réparties entre ce point et le point* B, *est proportionnelle à la composante horizontale de la résultante des efforts intérieurs développés dans la section* C *lorsque la charge mobile passe en* D.

(b) *La somme des moments, par rapport à un point quelconque* D *situé entre la section* C *et la retombée* A, *des forces fictives* $\frac{y-z''}{I}\,ds$ *réparties entre ce point et le point* A, *est proportionnelle à la composante horizontale de la résultante des efforts intérieurs développés dans la section* C *lorsque la charge mobile passe en* D.

3° — *Les propositions* (a) *et* (b) *s'appliquent également aux forces fictives* $\frac{y-z'''}{I}\,ds$, *et à la composante verticale de la résultante des efforts intérieurs développés dans la section* C *par le passage de la charge mobile.*

En se référant à une propriété connue des courbes funiculaires et à la définition des lignes d'influence, on transforme comme suit le théorème qui précède :

Théorème II. — *Étant donnés un arc encastré à ses deux extrémités, parcouru par une charge mobile, et une section transversale* C *arbitrairement choisie, si on applique successivement des forces fictives verticales* 1° $\frac{y-z'}{I}\,ds$, 2° $\frac{y-z''}{I}\,ds$, 3° $\frac{y-z'''}{I}\,ds$, *tout le long de la ligne*

Digitized by Google

moyenne de l'arc, ($y-z'$, $y-z''$, $y-z'''$ étant les segments de verticales précédemment définis), *qu'avec des distances polaires arbitraires on construise les trois courbes funiculaires correspondantes, qu'on mène des tangentes aux deux extrémités de chacune de ces courbes et qu'on arrête ces tangentes à la verticale du point* C :

Les segments de verticales compris entre chacune de ces courbes funiculaires et les tangentes y relatives sont respectivement proportionnels aux ordonnées des lignes d'influence du moment fléchissant et des composantes horizontale et verticale de la résultante de translation des efforts intérieurs développés dans la section C.

§ 44. — Propriétés des courbes funiculaires correspondantes aux forces fictives $\frac{y-z'}{I}ds$, $\frac{y-z''}{I}ds$, $\frac{y-z'''}{I}ds$.

Théorème I. — *Les tangentes aux extrémités de la courbe funiculaire correspondante aux forces fictives verticales* $\frac{y-z'}{I}ds$, *réparties tout le long de l'arc, se coupent sur la verticale du centre de gravité* C *de la section considérée.*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la résultante des forces fictives en question, réparties tout le long de la ligne moyenne AB de l'arc, passe par le point C, ou, par suite, que la somme des moments de ces forces par rapport à C soit nulle; c'est-à-dire que

$$\int_A^B \left(\frac{y-z'}{I}ds\right)x = 0,$$

ou bien

$$\int_A^B \frac{z'x}{I}ds = \int_A^B \frac{xy}{I}ds;$$

telle est l'égalité à vérifier.

Or, en chaque point (xy) de la ligne moyenne de l'arc, z' a pour valeur, d'après les équations (8) du § 43,

$$z' = -\frac{d''' - d''}{c'' - c'''}x + \frac{c''d''' - c'''d''}{c'' - c'''};$$

Digitized by Google

par suite

$$\int_A^B \frac{z'x}{I}\,ds = -\frac{d'''-d''}{c''-c'''}\int_A^B \frac{x^2}{I}\,ds + \frac{c''d'''-c'''d''}{c''-c'''}\int_A^B \frac{x}{I}\,ds.$$

Mais, en vertu du théorème des moments,

$$\int^B \frac{x^2}{I}\,ds = c'''\int_A^B \frac{x}{I}\,ds,$$

puisque c''' est l'abscisse du centre o''' des forces fictives parallèles $\frac{x}{I}\,ds$ réparties tout le long de l'arc.

Par conséquent

$$\int_A^B \frac{z'x}{I}\,ds = \left(-\frac{d'''-d''}{c''-c'''}\,c''' + \frac{c''d'''-c'''d''}{c''-c'''}\right)\int_A^B \frac{x}{I}\,ds = d'''\int_A^B \frac{x}{I}\,ds.$$

Or d''' étant l'ordonnée du centre o''' des forces fictives parallèles $\frac{x}{I}\,ds$, on a

$$d'''\int_A^B \frac{x}{I}\,ds = \int_A^B \frac{xy}{I}\,ds.$$

Donc finalement

$$\int_A^B \frac{z'x}{I}\,ds = \int_A^B \frac{xy}{I}\,ds.$$

C'est précisément l'égalité qu'il s'agissait de vérifier.

THÉORÈME II. — *Les tangentes aux extrémités de la courbe funiculaire correspondante aux forces fictives verticales* $\frac{y-z''}{I}\,ds$, *réparties tout le long de l'arc, sont situées dans le prolongement l'une de l'autre, ou, autrement dit, coïncident avec la ligne de fermeture de cette courbe.*

Cette proposition résulte immédiatement de ce que les forces fictives en question sont en équilibre, ainsi que nous allons le montrer en vérifiant les deux égalités

$$(a) \qquad \int_A^B \frac{y-z''}{I}\,ds = 0 \quad \text{et} \quad \int_A^B \left(\frac{y-z''}{I}\,ds\right)x = 0,$$

Digitized by Google

ou bien

$$\int_A^B \frac{z''}{I}\,ds = \int_A^B \frac{y}{I}\,ds \quad \text{et} \quad \int_A^B \frac{z''x}{I}\,ds = \int_A^B \frac{xy}{I}\,ds.$$

En effet, en chaque point (xy) de la ligne moyenne de l'arc, z'' a pour valeur, d'après les équations (8) du § 43,

$$z'' = -\frac{d'-d'''}{c'''-c'}x + \frac{c'''d'-c'd'''}{c'''-c'};$$

donc

$$\int_A^B \frac{z''}{I}\,ds = -\frac{d'-d'''}{c'''-c'}\int_A^B \frac{x}{I}\,ds + \frac{c'''d'-c'd'''}{c'''-c'}\int_A^B \frac{ds}{I},$$

et

$$\int_A^B \frac{z''x}{I}\,ds = -\frac{d'-d'''}{c'''-c'}\int_A^B \frac{x^2}{I}\,ds + \frac{c'''d'-c'd'''}{c'''-c'}\int_A^B \frac{x}{I}\,ds.$$

Mais, en vertu du théorème des moments,

$$\int_A^B \frac{x}{I}\,ds = c'\int_A^B \frac{ds}{I} \quad \text{et} \quad \int_A^B \frac{x^2}{I}\,ds = c'''\int_A^B \frac{x}{I}\,ds,$$

puisque c' et c'' sont les abscisses des points o' et o'', centres respectifs des forces fictives parallèles $\frac{ds}{I}$ et $\frac{x}{I}\,ds$ réparties tout le long de l'arc.

Par suite

$$\int_A^B \frac{z''}{I}\,ds = \left(-\frac{d'-d'''}{c'''-c'}c' + \frac{c'''d'-c'd'''}{c'''-c'}\right)\int_A^B \frac{ds}{I} = d'\int_A^B \frac{ds}{I},$$

et

$$\int_A^B \frac{z''x}{I}\,ds = \left(-\frac{d'-d'''}{c'''-c'}c''' + \frac{c'''d'-c'd'''}{c'''-c'}\right)\int_A^B \frac{x}{I}\,ds = d'''\int_A^B \frac{x}{I}\,ds.$$

Or, d' et d''' étant les ordonnées des centres o' et o''' des forces fictives parallèles $\frac{ds}{I}$ et $\frac{x}{I}\,ds$, réparties tout le long de l'arc, on a

$$d'\int_A^B \frac{ds}{I} = \int_A^B \frac{y}{I}\,ds \quad \text{et} \quad d'''\int_A^B \frac{x}{I}\,ds = \int_A^B \frac{xy}{I}\,ds;$$

Digitized by Google

donc finalement

$$\int_A^B \frac{z''}{I}\,ds = \int_A^B \frac{y}{I}\,ds \quad \text{et} \quad \int_A^B \frac{z''x}{I}\,ds = \int_A^B \frac{xy}{I}\,ds.$$

Ce sont les égalités qu'il s'agissait de vérifier.

Scolie. — La première des équations (*a*) montre que *le polygone des forces fictives verticales* $\frac{y-z''}{I}\,ds$ *est fermé.*

Théorème III. — *Les tangentes aux extrémités de la courbe funiculaire correspondante aux forces fictives verticales* $\frac{y-z'''}{I}\,ds$, *réparties tout le long de l'arc, sont parallèles.*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le premier et le dernier rayon polaire du polygone des forces fictives $\frac{y-z'''}{I}\,ds$ coïncident, ce qui nécessite que la somme algébrique de ces forces soit nulle, c'est-à-dire que

$$(b) \qquad \int_A^B \frac{y-z'''}{I}\,ds = 0, \quad \text{ou bien} \quad \int_A^B \frac{z'''}{I}\,ds = \int_A^B \frac{y}{I}\,ds;$$

telle est l'égalité que nous allons vérifier.

En chaque point (xy) de la ligne moyenne de l'arc, z''' a pour valeur (équations (8) du § 43)

$$z''' = -\frac{d''-d'}{c'-c''}\,x + \frac{c'd''-c''d'}{c'-c''}.$$

Donc

$$\int_A^B \frac{z'''}{I}\,ds = -\frac{d''-d'}{c'-c''}\int_A^B \frac{x}{I}\,ds + \frac{c'd''-dc''}{c'-c''}\int_A^B \frac{ds}{I}.$$

Mais

$$\int_A^B \frac{x}{I}\,ds = c\int_A^B \frac{ds}{I},$$

puisque c' est l'abscisse du centre o' des forces fictives $\frac{ds}{I}$ réparties tout le long de la ligne moyenne.

Digitized by Google

Par suite

$$\int_A^B \frac{z'''}{I}\,ds = \left(-\frac{d''-d'}{c'-c''}c' + \frac{c'd''-c''d'}{c'-c''}\right)\int_A^B \frac{ds}{I} = d'\int_A^B \frac{ds}{I}.$$

Or

$$d'\int_A^B \frac{ds}{I} = \int_A^B \frac{y}{I}\,ds,$$

puisque d' est l'ordonnée du centre o' des forces fictives $\frac{ds}{I}$.

Donc enfin

$$\int_A^B \frac{z'''}{I}\,ds = \int_A^B \frac{y}{I}\,ds.$$

Ce qui justifie la proposition énoncée.

Scolie. — L'équation (*b*) montre que *le polygone des forces fictives verticales* $\frac{y-z'''}{I}ds$ *est fermé.*

Théorème IV. — *Les trois courbes funiculaires correspondantes aux forces fictives* $\frac{y-z'}{I}ds$, $\frac{y-z''}{I}ds$ *et* $\frac{y-z'''}{I}ds$ *présentent des points d'inflexion situés sur les verticales des points d'intersection respectifs des trois droites* o″o‴, o′o‴ et o′o″ *avec la ligne moyenne de l'arc.*

Cette proposition résulte immédiatement de ce qu'en ces points d'intersection les forces fict ves dont il s'agit s'annulent en changeant de signe.

§ 45. — Construction des lignes d'influence du moment fléchissant et des composantes horizontale et verticale de la résultante de translation des efforts intérieurs développés en une section C arbitrairement choisie.

Le théorème II du § 43 ramène cette construction à celle de trois courbes funiculaires correspondantes aux forces fictives verticales $\frac{y-z'}{I}ds$, $\frac{y-z''}{I}ds$ et $\frac{y-z'''}{I}ds$ réparties tout le long de la ligne moyenne de l'arc.

Divisons cette ligne moyenne en un certain nombre de parties

Digitized by Google

Δs égales entre elles, Δs ayant la même valeur qu'au § 38 *(Construction des centres)*.

Nous pouvons substituer, sans erreur appréciable, aux trois courbes funiculaires dont il s'agit, trois polygones funiculaires correspondants respectivement à des forces fictives élémentaires finies $\frac{y-z'}{I}\Delta s$, $\frac{y-z''}{I}\Delta s$ et $\frac{y-z'''}{I}\Delta s$, appliquées au milieu de chaque élément Δs de ligne moyenne.

De plus, il convient d'affecter ces forces fictives du coefficient constant $\frac{I_m}{n\Delta s}$ déjà employé dans la détermination des centres et des quantités φ', φ'' et φ''' (§ 38), — c'est-à-dire de leur attribuer les valeurs suivantes :

$$(y-z')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}, \quad (y-z'')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I} \quad \text{et} \quad (y-z''')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}.$$

Traçons *(fig. 3,* pl. 200*)* les trois polygones de ces forces fictives, lesquels se réduisent à trois droites, en ayant soin de commencer par l'extrémité A de l'arc; puis choisissons, sur les horizontales menées par les origines α', α'', α''' de ces polygones, des pôles p', p'', p''' dont les distances polaires B′, B″, B‴, pour l'instant arbitraires, seront regardées comme positives ou comme négatives, suivant que les pôles seront à gauche ou à droite des polygones des forces; enfin, construisons les polygones funiculaires correspondants $a'C'b'$, $a''C''b''$, $a'''C'''b'''$, dont nous faisons coïncider respectivement les premiers côtés avec les horizontales U_1U_1', U_2U_2', U_3U_3', et dont nous prolongeons les premiers et les derniers côtés jusqu'à la verticale du point C.

Ces polygones funiculaires ont pour limites, lorsqu'on fait décroître indéfiniment Δs, les courbes funiculaires des $\frac{y-z'}{I}ds$, $\frac{y-z''}{I}ds$ et $\frac{y-z'''}{I}ds$, lesquelles jouissent des propriétés énoncées au § 44 (théorèmes I, II et III).

Donc : 1° le dernier côté $b'c'$ du polygone funiculaire correspondant aux forces fictives $(y-z')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, coupera U_1U_1' en un point c' situé sur la verticale du point C ; 2° le dernier côté $b''c''$ du polygone

Digitized by Google

funiculaire correspondant aux efforts fictifs $(y-z'')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ coïncidera avec U_2U_2' et fermera par conséquent le polygone ; 3° le dernier côté $b'''c'''$ du polygone funiculaire correspondant aux forces fictives $(y-z''')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ sera parallèle à U_3U_3'. Ce sont là des vérifications de l'exactitude des constructions.

Désignons par K'H', K''H'' et K'''H''' les segments de la verticale d'un point quelconque D de l'arc, interceptés respectivement par ces trois polygones et leurs côtés extrêmes, prolongés jusqu'à la verticale du point C, segments que nous regarderons comme positifs ou négatifs, suivant que les points H seront au-dessous ou au-dessus des points K ; on a, en vertu d'une propriété connue des polygones funiculaires :

En tout point D situé dans la partie d'arc BC :	En tout point D situé dans la partie d'arc AC :
$+\overset{D.B}{\underset{D}{M}}Y(y-z')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}=B'\times K'H',$	$-\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y(y-z')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}=B'\times K'H',$
$+\overset{D.B}{\underset{D}{M}}Y(y-z'')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}=B''\times K''H'',$	$-\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y(y-z'')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}=B''\times K''H'',$
$+\overset{D.B}{\underset{D}{M}}Y(y-z''')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}=B'''\times K'''H''',$	$-\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y(y-z''')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}=B'''\times K'''H''',$

étant entendu que les segments de verticales sont lus à l'échelle des longueurs, et les distances polaires à l'échelle des forces fictives employées, qui est celle des longueurs, puisque les quantités $y-z'$, $y-z''$, $y-z'''$ sont des longueurs, que n est un nombre sans dimension et que $\frac{I_m}{I}$ est un rapport.

En multipliant les deux membres de chacune des relations précédentes par le facteur constant $\frac{n\Delta s}{I_m}$, il vient :

Digitized by Google

$$+\overset{D.B}{\underset{D}{M}}Y\frac{y-z'}{I}\Delta s=\frac{n\Delta s}{I_m}B'\times K'H', \qquad -\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y\frac{y-z'}{I}\Delta s=\frac{n\Delta s}{I_m}B'\times K'H',$$

$$+\overset{D.B}{\underset{D}{M}}Y\frac{y-z''}{I}\Delta s=\frac{n\Delta s}{I_m}B'\times K'H', \qquad -\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y\frac{y-z''}{I}\Delta s=\frac{n\Delta s}{I_m}B'\times K'H',$$

$$+\overset{D.B}{\underset{D}{M}}Y\frac{y-z'''}{I}\Delta s=\frac{n\Delta s}{I_m}B''\times K''H'', \qquad -\overset{D.A}{\underset{D}{M}}Y\frac{y-z'''}{I}\Delta s=\frac{n\Delta s}{I_m}B''\times K''H''.$$

Par suite, à cause des équations (9) et (9') du § 43, et à la substitution près des forces fictives élémentaires finies aux forces fictives infiniment petites, on a, *en un point quelconque* D de l'arc, c'est-à-dire *pour toute position de la charge mobile* P,

$$\frac{M}{b}=P\frac{\frac{n\Delta s}{I_m}B'}{(o'q')\varphi'}K'H',$$

$$X=P\frac{\frac{n\Delta s}{I_m}B''}{(o''q'')\varphi''}K''H'',$$

$$-Y=P\frac{\frac{n\Delta s}{I_m}B'''}{(o'''q''')\varphi'''}K'''H'''.$$

En remplaçant φ', φ'' et φ''' par leurs valeurs tirées des relations (2), (3) et (4) du § 38, il vient

$$\frac{M}{b}=\frac{P\times B'}{(o'q')\Phi'}K'H',$$

$$X=\frac{P\times B''}{(o''q'')\Phi''}K''H'',$$

$$-Y=\frac{P\times B'''}{(o'''q''')\Phi'''}K'''H'''.$$

Cela posé, désignons par $\overline{P}$, $\overline{B'}$, $\overline{o'q'}$, $\overline{\Phi'}$, $\overline{K'H'}$, etc... les longueurs brutes, — abstraction faite de toute échelle, — des lignes qui sur l'épure représentent les quantités P, B', $o'q'$, Φ', K'H', etc...

Soient, en outre, $\frac{1}{f}$ l'échelle des forces et $\frac{1}{l}$ l'échelle des longueurs.

On a

$$P=\overline{P}\times f, \quad B'=\overline{B'}\times l, \quad o'q'=\overline{o'q'}\times l,$$

$$\Phi'=\overline{\Phi'}\times l, \quad K'H'=\overline{K'H'}\times l, \text{ etc...}$$

Digitized by Google

En substituant ces valeurs dans les trois équations précédentes, nous obtenons

$$\frac{M}{b} = \left(\frac{\overline{P} \times \overline{B'}}{\overline{(o'q')}\ \overline{\Phi'}}\ \overline{K'H'}\right) f,$$

$$X = \left(\frac{\overline{P} \times \overline{B''}}{\overline{(o''q'')}\ \overline{\Phi''}}\ \overline{K''H''}\right) f, \qquad -Y = \left(\frac{\overline{P} \times \overline{B'''}}{\overline{(o'''q''')}\ \overline{\Phi'''}}\ \overline{K'''H'''}\right) f.$$

Or, on peut toujours prendre pour distances polaires $\overline{B'}$, $\overline{B''}$, $\overline{B'''}$, des longueurs données par les formules

$$\overline{B'} = \frac{\overline{(o'q')}\ \overline{\Phi'}}{\overline{P}}, \quad \overline{B''} = \frac{\overline{(o''q'')}\ \overline{\Phi''}}{\overline{P}}, \quad \overline{B'''} = -\frac{\overline{(o'''q''')}\ \overline{\Phi'''}}{\overline{P}},$$

auquel cas les équations précédentes se réduisent à

$$\frac{M}{b} = \overline{K'H'} \times f, \quad X = \overline{K''H''} \times f, \quad Y = \overline{K'''H'''} \times f;$$

et l'on peut dire, dès lors, que les segments de verticales $\overline{K'H'}$, $\overline{K''H''}$ et $\overline{K'''H'''}$, correspondants aux polygones funiculaires tracés avec les distances polaires ci-dessus, représentent, *à l'échelle des forces*, les quantités $\frac{M}{b}$, X et Y (*), ou encore qu'ils sont *égaux aux ordonnées des lignes d'influence des dites quantités*.

Par suite, si l'on porte ces segments en ordonnées, à partir des droites horizontales $U_1U'_1$, $U_2U'_2$, $U_3U'_3$, choisies comme axes des abscisses, les lieux des extrémités de ces ordonnées seront les lignes d'influence cherchées.

En raison de la position que nous avons eu soin de donner aux premiers côtés des polygones funiculaires, cette opération se trouve toute faite pour les parties $a'C'$ et $a'''C'''$ des lignes d'influence de $\frac{M}{b}$ et de Y, qui correspondent à la partie d'arc AC, et elle est complètement réalisée pour la totalité de la ligne d'influence de X.

On remarquera qu'en ce qui concerne la ligne d'influence de Y, l'opération en question se réduit à transporter parallèlement à elle-même la partie $C'''b'''$ du polygone funiculaire des efforts fictifs $(y - z''')\ \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, située à droite de la verticale de C, de manière à

(*) Dans la figure 3 *(pl. 200)*, on a pris $\overline{B''} = +\frac{\overline{(o''q'')}\ \overline{\Phi''}}{\overline{P}}$, de sorte que $\overline{K''H''}$ représente $= Y$ et non $+ Y$.

Digitized by Google

amener le côté extrême de droite de ce polygone en coïncidence avec $U_3U'_3$; la translation a donc lieu d'une quantité égale à la distance verticale des côtés extrêmes (*).

Quant à la ligne d'influence de X, il résulte de ce qui précède qu'elle se confond avec le polygone funiculaire des efforts fictifs $(y - z'')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$.

NOTA. — Il est facile de tracer directement, — c'est-à-dire sans effectuer le report des segments tels que K'H', — la portion b'_1C' de la ligne d'influence de la quantité $\frac{M}{b}$; à cet effet, on construira à part un polygone de celles des forces fictives $(y-z')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ dont les points d'application sont sur la portion d'arc CB; soit $\gamma'_1\beta'_1$ ce polygone. Puis on prendra un pôle p'_1, de de distance B', sur l'horizontale de l'extrémité β'_1. Enfin, on tracera le polygone funiculaire correspondant, en commençant par la droite et en ayant soin de faire coïncider le côté extrême de droite avec l'horizontale $U_1U'_1$. Ce polygone funiculaire sera précisément la partie de ligne d'influence b'_1C' cherchée.

RÉSUMÉ DES CONSTRUCTIONS *à effectuer pour déterminer les lignes à influence du moment fléchissant et des composantes horizontale et verticale de la résultante des efforts intérieurs développés en une section* C *arbitrairement choisie.*

1° Construire les quantités $\overline{\Phi'}$, $\overline{\Phi''}$, $\overline{\Phi'''}$, ainsi que le centre fixe o' de la travée et les centres o'' et o''' correspondants à la section C (§ 38); joindre ces centres et mener les lignes $o'q'$, $o''q''$ et $o'''o'''$ (§ 42)

2° Tracer trois polygones funiculaires, de distances polaires $\overline{B'} = \frac{\overline{(o'q')}\,\overline{\Phi'}}{\overline{P}}$, $\overline{B''} = \frac{\overline{(o''q'')}\,\overline{\Phi''}}{\overline{P}}$, $\overline{B'''} = \frac{\overline{(o'''q''')}\,\overline{\Phi'''}}{\overline{P}}$, correspondants à des efforts fictifs verticaux ayant respectivement pour intensités $(y-z')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, $(y-z'')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, $(y-z''')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, n et I_m ayant les valeurs

(*) Il est facile de démontrer que cette distance verticale représente la charge P à l'échelle des forces.

Digitized by Google

déjà employées pour la construction des quantités $\overline{\Phi'}, \overline{\Phi''}, \overline{\Phi'''}$ et des centres o', o'' et o'''.

3° Ramener les ordonnées de ces polygones, comptées à partir des côtés extrêmes prolongés jusqu'à la verticale de C, à avoir leurs pieds sur les axes $U_1U'_1$, $U_2U'_2$, $U_3U'_3$.

§ 46. — Lignes d'influence des quantités M, X et Y correspondantes aux diverses sections de l'arc.

Lorsqu'on aura construit, ainsi qu'il vient d'être dit, les lignes d'influence relatives à une section C quelconque de l'arc, on utilisera les résultats obtenus, pour simplifier très notablement les constructions similaires à effectuer pour la détermination des lignes d'influence relatives à d'autres sections arbitrairement choisies.

Nous allons établir en effet :

1° Que les centres o'' et o''' relatifs à la section C étant connus, on en tire immédiatement ceux o''_1, o'''_1, relatifs à une autre section C_1 arbitrairement choisie ;

2° Que les deux polygones funiculaires des efforts fictifs $(y_1 - z''_1)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ et $(y_1 - z'''_1)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, polygones dont se déduisent les lignes d'influence des quantités X et Y relatives à la section C_1, sont identiques à ceux des efforts fictifs

$$(y - z'')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I} \quad \text{et} \quad (y - z''')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I},$$

construits pour la section C, et qu'en conséquence il n'y a lieu d'effectuer, pour la section C_1, que le seul tracé du polygone funiculaire des efforts fictifs $(y_1 - z'_1)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, polygone qui fait connaître la ligne d'influence du moment fléchissant en la dite section.

Propriétés relatives aux centres o'' et o''' correspondants aux diverses sections de l'arc (*)

Théorème I. — *Lorsque le centre de gravité* C *décrit la ligne moyenne*

(*) Voir la Note I. — *Propriétés des droites qui joignent les centres.*

Digitized by Google

de l'arc, en entraînant d'un mouvement de translation les axes de coordonnées Cx *et* Cy :

1° *Les centres* o'' *et* o''' *correspondants décrivent deux droites issues du centre fixe* o' *de la travée; autrement dit, les côtés* $o'o''$ *et* $o'o'''$ *du triangle des centres restent fixes, tandis que le troisième* $o''o'''$ *se déplace*;

2° *La situation du point* C *étant supposée rapportée à deux axes de coordonnées fixes, l'un* $o'x'$ *horizontal, l'autre* $o'y'$ *vertical* (*fig. 10*, p. 468), *les distances* $o'o''$ *et* $o'o'''$ *varient en raison inverse : la première, de l'ordonnée, la seconde, de l'abscisse du centre de gravité de la section mobile*;

3° *Les produits* $(o''q'')\varphi''$ *et* $(o'''q''')\varphi'''$ *restent constants*;

4° *Les produits* $(c''-c')\varphi''$ *et* $(c'''-c')\varphi'''$ *restent également constants*(*).

1° — Les points o'' et o''' sont respectivement les centres des forces fictives parallèles $\frac{y}{I}\,ds$ et $\frac{x}{I}\,ds$, dont les valeurs dépendent de la position du point C, origine des coordonnées x et y.

Les coordonnées de o'' et de o''' par rapport à Cx et Cy sont données par les formules :

$$(a)\qquad \begin{cases} c'' = \dfrac{\displaystyle\int_A^B \frac{xy}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{y}{I}\,ds}, \qquad d'' = \dfrac{\displaystyle\int_A^B \frac{y^2}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{y}{I}\,ds}, \\ c''' = \dfrac{\displaystyle\int_A^B \frac{x^2}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{x}{I}\,ds}, \qquad d''' = \dfrac{\displaystyle\int_A^B \frac{xy}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{x}{I}\,ds}. \end{cases}$$

Convenons maintenant de regarder la fibre moyenne AB de l'arc comme une ligne matérielle dont le poids de chaque élément ds serait égal à $\frac{ds}{I}$.

(*) La nature de la question qui fait l'objet de ce chapitre exige que le point C soit pris sur la ligne moyenne de l'arc. Mais il faut remarquer que les quatre propositions ci-dessus ont un caractère purement géométrique et qu'elles restent vraies, lors même que le point C, considéré alors seulement comme origine des coordonnées Cx et Cy, se déplace dans le plan de la ligne moyenne sans être assujetti à rester sur cette ligne.

On remarquera aussi qu'elles sont encore applicables lorsque les axes Cx et Cy, au lieu d'être, l'un horizontal, l'autre vertical, ont des directions rectangulaires quelconques; dans ce cas, les axes $o'x'$ et $o'y'$ du 2° doivent être menés parallèlement à Cx et à Cy.

Digitized by Google

Le point o' est le centre de gravité de cette ligne. Les dénominateurs des expressions de c'', d'', c''' et d''' représentent les moments de la dite ligne pesante par rapport aux deux plans, l'un horizontal, l'autre vertical, qui ont pour traces Cx et Cy sur le plan de la ligne moyenne ; les numérateurs en représentent les moments du second ordre par rapport aux mêmes plans.

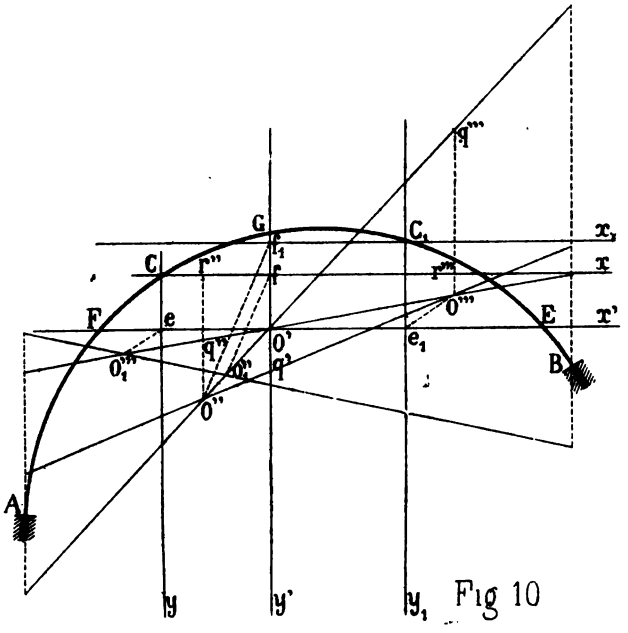


Fig 10

Désignons par x' et y' les coordonnées d'un point quelconque de la ligne moyenne relativement aux axes $o'x'$ et $o'y'$ parallèles à Cx et à Cy et passant par le centre de gravité o'. On a, d'après les propriétés connues des moments du premier et du second ordre,

$$\int_A^B \frac{y}{I}\,ds = d'\int_A^B \frac{ds}{I}, \qquad \int_A^B \frac{xy}{I}\,ds = \int_A^B \frac{x'y'}{I}\,ds + c'd'\int_A^B \frac{ds}{I},$$

$$\int_A^B \frac{x}{I}\,ds = c'\int^B \frac{ds}{I}, \qquad \int_A^B \frac{y^2}{I}\,ds = \int_A^B \frac{y'^2}{I}\,ds + d'^2\int_A^B \frac{ds}{I},$$

$$\int_A^B \frac{x^2}{I}\,ds = \int_A^B \frac{x'^2}{I}\,ds + c'^2\int_A^B \frac{ds}{I},$$

Digitized by Google

où c' et d' sont les coordonnées de o' par rapport aux axes Cx et Cy.

En substituant ces valeurs dans les formules (a), il vient

$$(b)\quad \begin{cases} c'' = \dfrac{\displaystyle\int_A^B \frac{x'y'}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}\,\frac{1}{d'} + c' = \frac{C'^2}{d'} + c', & d'' = \dfrac{\displaystyle\int_A^B \frac{y'^2}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}\,\frac{1}{d'} + d' = \frac{B'^2}{d'} + d', \\ c''' = \dfrac{\displaystyle\int_A^B \frac{x'^2}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}\,\frac{1}{c'} + c' = \frac{A'^2}{c'} + c', & d''' = \dfrac{\displaystyle\int_A^B \frac{x'y'}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}\,\frac{1}{c'} + d' = \frac{C'^2}{c'} + d', \end{cases}$$

en posant

$$(c)\quad A'^2 = \frac{\displaystyle\int_A^B \frac{x'^2}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}, \quad B'^2 = \frac{\displaystyle\int_A^B \frac{y'^2}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}} \quad C'^2 = \frac{\displaystyle\int_A^B \frac{x'y'}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}.$$

A', B' et C' sont des constantes indépendantes de la position du point C, puisque les axes de coordonnées ox' et oy' sont fixes.

Si on désigne par γ'', δ'' et γ''', δ''' les coordonnées des centres o'' et o''' par rapport aux axes $o'x'$ et $o'y'$, les relations (b) donnent, eu égard aux formules connues de changement de coordonnées,

$$(d)\quad \begin{cases} \gamma'' = \dfrac{\displaystyle\int_A^B \frac{x'y'}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}\,\frac{1}{d'} = \frac{C'^2}{d'}, & \delta'' = \dfrac{\displaystyle\int_A^B \frac{y'^2}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}\,\frac{1}{d'} = \frac{B'^2}{d'}, \\ \gamma''' = \dfrac{\displaystyle\int_A^B \frac{x'^2}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}\,\frac{1}{c'} = \frac{A'^2}{c'}, & \delta''' = \dfrac{\displaystyle\int_A^B \frac{x'y'}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}\,\frac{1}{c'} = \frac{C'^2}{c'}. \end{cases}$$

Digitized by Google

D'où l'on tire

$$(e) \qquad \frac{\delta''}{\gamma''} = \frac{B'^2}{C'^2} \quad \text{et} \quad \frac{\delta'''}{\gamma'''} = \frac{C'^2}{A'^2}.$$

Ces équations ont pour seconds membres des quantités constantes. Si on y regarde les δ et les γ comme les coordonnées courantes des points o'' et o''', elles représentent deux droites passant par l'origine o' des coordonnées.

Donc, lorsque le point C décrit la ligne moyenne de l'arc, les lieux des centres o'' et o''' correspondants à ce point, sont deux droites (*).

2° — Les coordonnées des centres o'' et o''', correspondants à une section C quelconque, prises par rapport aux axes $o'x'$, $o'y'$, sont données par les formules (d). De même, les coordonnées $\gamma''_1, \delta''_1, \gamma'''_1, \delta'''_1$ des centres o''_1 et o'''_1, correspondants à une autre section C_1 arbitrairement choisie, ont pour expressions :

$$\gamma''_1 = \frac{C'^2}{d'_1}, \qquad \delta''_1 = \frac{B'^2}{d'_1},$$

$$\gamma'''_1 = \frac{A'^2}{c'_1}, \qquad \delta'''_1 = \frac{C'^2}{c'_1},$$

où c'_1 et d'_1 sont les coordonnées du centre fixe o' par rapport aux axes C_1x_1 et C_1y_1 parallèles à Cx et à Cy (*fig. 10*, p. 55).

Des formules (d) et de celles ci-dessus on déduit

$$\frac{\gamma''}{\gamma''_1} = \frac{\delta''}{\delta''_1} = \frac{d'_1}{d'} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma'''}{\gamma'''_1} = \frac{\delta'''}{\delta'''_1} = \frac{c'_1}{c'};$$

et, en vertu de la propriété projective des rapports,

$$\frac{o'o''}{o'o''_1} = \frac{d'_1}{d'} \quad \text{et} \quad \frac{o'o'''}{o'o'''_1} = \frac{c'_1}{c'}.$$

Or, si on désigne par ξ, η et ξ_1, η_1 les coordonnées des points C et C_1 relativement aux axes $o'x'$ et $o'y'$, on a

$$c' = -\xi, \quad d' = -\eta, \quad c'_1 = -\xi_1, \quad d'_1 = -\eta_1;$$

d'où, finalement,

$$(f) \qquad \frac{o'o''}{o'o''_1} = \frac{\eta_1}{\eta} \quad \text{et} \quad \frac{o'o'''}{o'o'''_1} = \frac{\xi_1}{\xi}.$$

Ces relations justifient le 2° du théorème.

(*) On démontrerait facilement que la droite fixe $o'o'''$ est la *ligne de fermeture de l'arc* et que, par suite, la courbe funiculaire des forces fictives $\frac{y-z}{I}\,ds$ est la *ligne de poussée* de M. Maurice Lévy.

Digitized by Google

3° — Nous allons montrer maintenant que les produits $(o''q'')\varphi''$ et $(o'''q''')\varphi'''$ sont constants, quelle que soit la position du point C

φ'' et φ''' ont pour expressions (formules (*e*), § 37)

$$\varphi'' = \int_A^B \frac{y}{I}\,ds, \qquad \varphi''' = \int_A^B \frac{x}{I}\,ds,$$

ou, puisque c' et d' sont les coordonnées du centre fixe o' relativement aux axes Cx et Cy, et que ce point est le centre des forces fictives $\frac{ds}{I}$,

$$(g) \qquad \varphi'' = d' \int_A^B \frac{ds}{I}, \qquad \varphi''' = c' \int_A^B \frac{ds}{I}.$$

D'autre part, les droites $o'o'''$, $o'o''$, dont les coefficients angulaires sont les seconds membres des formules (*e*), ont pour équations, par rapport aux axes Cx et Cy,

$$(h) \qquad \begin{cases} (o'o''') & \dfrac{y-d'}{x-c'} = \dfrac{C'^2}{A'^2}, \\ (o'o'') & \dfrac{y-d'}{x-c'} = \dfrac{B'^2}{C'^2}, \end{cases}$$

et les ordonnées $r''q''$, $r'''q'''$ de ces droites, répondant respectivement aux abscisses c'' et c''', ont dès lors pour valeurs

$$r''q'' = d' + \frac{C'^2}{A'^2}(c'' - c'), \qquad r'''q''' = d' + \frac{B'^2}{C'^2}(c''' - c');$$

d'où

$$o''q'' = r''q'' - r''o'' = d' - d'' + \frac{C'^2}{A'^2}(c'' - c'),$$

$$o'''q''' = r'''q''' - r'''o''' = d' - d''' + \frac{B'^2}{C'^2}(c''' - c').$$

Remplaçons $(d'-d'')$, $(c''-c')$, $(d'-d''')$ et $(c'''-c')$, par leurs valeurs tirées des formules (*b*) ; nous obtenons

$$(j) \qquad \begin{cases} o''q'' = \left(-B'^2 + \dfrac{C'^4}{A'^2}\right)\dfrac{1}{d'}, \\ o'''q''' = \left(-C'^2 + \dfrac{A'^2B'^2}{C'^2}\right)\dfrac{1}{c'}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Les relations (*g*) et (*j*) donnent, pour les produits $(o''q'')\varphi''$ et $(o'''q''')\varphi'''$, les valeurs suivantes

$$(k)\quad \begin{cases} (o''q'')\varphi'' = \left(-B'^2 + \dfrac{C'^4}{A'^2}\right)\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}, \\ (o'''q''')\varphi''' = \left(-C'^2 + \dfrac{A'^2B'^2}{C'^2}\right)\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}, \end{cases}$$

qui sont des constantes, ainsi que nous l'avions annoncé.

4° — Il reste à démontrer enfin que les valeurs des produits $(c''-c')\varphi''$ et $(c'''-c')\varphi'''$ sont indépendantes de la position du point C.

Les équations (*b*) donnent

$$c'' - c' = \frac{C'^2}{d'}, \text{ et } c''' - c' = \frac{A'^2}{c'}.$$

Multipliant membre à membre ces deux relations et les deux équations (*g*) on obtient, pour $(c''-c')\varphi'$ et $(c'''-c')\varphi'''$, les valeurs suivantes

$$(c'' - c')\,\varphi'' = C'^2 \int_A^B \frac{ds}{I} = \int_A^B \frac{x'y'}{I}ds$$

et

$$(c''' - c')\,\varphi''' = A'^2 \int_A^B \frac{ds}{I} = \int_A^B \frac{x'^2}{I}ds,$$

qui sont constantes.

ÉTANT DONNÉS LE CENTRE FIXE o' DE LA TRAVÉE ET LES CENTRES o'' ET o''' CORRESPONDANTS A UNE SECTION C, CONSTRUIRE LES CENTRES o''_1 ET o'''_1 CORRESPONDANTS A UNE AUTRE SECTION C_1 ARBITRAIREMENT CHOISIE.

D'après le 1° du théorème précédent, o''_1 et o'''_1 se trouvent sur les droites fixes $o'o''$ et $o'o'''$ connues; on a de plus, en vertu du 2° dudit théorème [formules (*f*)],

$$(f)\qquad \frac{o'o''}{o'o''_1} = \frac{\eta_1}{\eta} \text{ et } \frac{o'o'''}{o'o'''_1} = \frac{\xi_1}{\xi}.$$

Ces relations conduisent immédiatement à la construction suivante (*fig. 10*, page 55).

Digitized by Google

Projeter C et C_1 sur $o'x'$ et sur $o'y'$ pour déterminer les coordonnées de ces points, savoir :

$$\xi = o'e, \quad \xi_1 = o'e_1, \quad \eta = o'f, \quad \eta_1 = o'f_1 ;$$

puis tirer $o''f_1$ et par f mener à cette ligne une parallèle qui coupe $o'o''$ au point o''_1 cherché.

Enfin, tirer $o'''e_1$ et par e mener à cette droite une parallèle qui rencontre $o'o'''$ au point o'''_1 cherché.

Remarque. — Si le point C_1 vient en E ou en F, sur l'axe $o'x'$, son ordonnée η_1 s'annule, et la première des formules (*f*) donne alors $o'o''_1 = \infty$; o''_1 est donc rejeté à l'infini sur $o'o''$, et la droite $o'''_1 o''_1$ devient une parallèle menée par o'''_1 à $o'o''$.

Si C_1 vient en G sur l'axe $o'y'$, son abscisse ξ_1 s'annule, et la seconde des formules (*e*) donne alors $o'o'''_1 = \infty$; o'''_1 est donc rejeté à l'infini sur $o'o'''$, et la droite $o''_1 o'''_1$ devient la parallèle menée par o''_1 à $o'o'''$.

LES LIGNES D'INFLUENCE DES QUANTITÉS M, X ET Y AFFÉRENTES A UNE SECTION C, D'AILLEURS QUELCONQUE, ÉTANT CONNUES, CONSTRUIRE LES LIGNES DE MÊME NATURE AFFÉRENTES A UNE AUTRE SECTION C_1 ARBITRAIREMENT CHOISIE.

THÉORÈME II. — *Les polygones funiculaires des efforts fictifs*

$$(y_1 - z''_1)\,\frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I} \quad \textit{et} \quad (y_1 - z'''_1)\,\frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I},$$

correspondants à la section C_1 *arbitrairement choisie, sont respectivement identiques à ceux des efforts fictifs*

$$(y - z'')\,\frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I} \quad \textit{et} \quad (y - z''')\,\frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I},$$

correspondants à la section C.

En effet :

1° Ces polygones correspondent à des efforts fictifs égaux, car, les droites $o'o'''_1$ et $o'o'''$, d'une part, $o'o''_1$ et $o'o''$, d'autre part, coïncidant entre elles (1° du théorème précédent), on a : $y_1 - z''_1 = y - z''$ et $y_1 - z'''_1 = y - z'''$;

2° Ils ont respectivement mêmes distances polaires ($\overline{B''}_1 = \overline{B''}$, $\overline{B'''}_1 = \overline{B'''}$), ainsi qu'il résulte immédiatement des expressions de

Digitized by Google

ces distances, données au § 45 (page 51), et du 3° du théorème précédent en vertu duquel on a

$$(o''_1q''_1)\varphi''_1 = (o''q'')\varphi'' \quad \text{et} \quad (o'''_1q'''_1)\varphi'''_1 = (o'''q''')\varphi''',$$

ou, d'après les relations (3) et (4) du § 38,

$$(o''_1q''_1)\Phi''_1 = (o''q'')\Phi'' \quad \text{et} \quad (o'''_1q'''_1)\Phi'''_1 = (o'''q''')\Phi'''.$$

CONSÉQUENCES.— 1° *Les lignes d'influence de la composante* X *sont les mêmes pour toutes les sections de l'arc et se confondent avec le polygone funiculaire des* $(y—z'')\ \frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I}$ *tracé pour la section* C.

En effet, pour toute section C_1 par exemple, la ligne d'influence de X n'est autre chose que le polygone funiculaire des efforts fictifs $(y_1—z''_1)\ \frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I}$ relatif à cette section (§ 45), et, d'après le théorème précédent, ce polygone est identique au polygone funiculaire des $(y—z'')\ \frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I}$ relatif à la section C.

2° *Les lignes d'influence de la composante* Y *relatives aux diverses sections de l'arc se déduisent toutes du seul polygone funiculaire des efforts fictifs* $(y—z''')\ \frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I}$ *relatif à la section* C.

Il résulte, en effet, immédiatement du théorème précédent et de la construction indiquée au § 45 qu'il suffira, pour obtenir la ligne d'influence de Y afférente à une section C_1 arbitrairement choisie, de transporter parallèlement à elle-même, dans le sens vertical, la partie du polygone funiculaire $a'''C'''b'''$ (Pl. 200, *fig. 3*) des $(y—z''')\ \frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I}$, située à droite de la verticale du centre de gravité C_1 de cette section, — l'amplitude de cette translation étant égale à la distance verticale des côtés extrêmes parallèles de ce polygone.

La ligne d'influence cherchée se composera de la partie non déplacée et de la partie déplacée occupant sa nouvelle position.

On pourra effectuer, une fois pour toutes, en $a'''_1b'''_1$, la translation de la totalité du polygone funiculaire. Alors, pour une section C_k

Digitized by Google

quelconque, la ligne d'influence de Y sera formée : 1° de la partie $a'''C'''_k$ du polygone non déplacé, située à gauche de la verticale de C_k, 2° de la partie $(C'''_k)_1 b'''_1$ du polygone déplacé, située à droite de cette verticale.

Conclusion. — En résumé, après avoir déterminé par les méthodes indiquées aux §§ 38 et 45, le centre fixe o' de la travée, les centres o'' et o''' correspondants à une section C arbitrairement choisie (*), les polygones funiculaires des efforts fictifs

$$(y-z')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}, \quad (y-z'')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}, \quad (y-z''')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I},$$

et, par suite, les lignes d'influence des quantités M, X et Y, correspondantes à la dite section, on se trouve connaître *la ligne d'influence de* X relative à toute autre section C_1, puisque cette ligne est la même pour toutes les sections ; et il suffit :

1° Pour obtenir *la ligne d'influence de* Y relative à toute autre section C_1, d'effectuer la translation du polygone funiculaire des $(y-z''')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ indiquée plus haut.

2° Pour déterminer *la ligne d'influence de* M relative à une section C_1 quelconque, de construire les centres o''_1 et o'''_1 correspondants à cette section, ainsi qu'il a été indiqué au présent paragraphe, de tirer $o''_1 o'''_1$, — ce qui fait connaître les segments de verticales $(y_1-z'_1)$ et, par suite, les efforts fictifs $(y_1-z'_1)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, — enfin, de tracer un polygone funiculaire de ces efforts qui fournit la ligne d'influence cherchée (§ 45).

§ 47. — Cas particulier où l'arc est de structure symétrique par rapport à la verticale du milieu de la corde.

Dans cette hypothèse, les constructions indiquées précédemment se simplifient, ainsi que nous allons le montrer brièvement.

(*) On peut, par exemple, choisir une des sections d'encastrement, A ou B ; les quantités M, X et Y correspondantes sont alors, la première, le moment d'encastrement, les deux autres, les composantes horizontale et verticale de la réaction de l'encastrement considéré.

Digitized by Google

CENTRE FIXE DE LA TRAVÉE ET CENTRES CORRESPONDANTS A UNE SECTION

1° *Le centre fixe o' de la travée et le centre o'' correspondant à une section* C *quelconque, sont situés sur la verticale du milieu de la corde (fig. 11)*, car ces points sont respectivement les centres des forces fictives parallèles $\frac{ds}{I}$ et $\frac{y}{I}\,ds$ qui, — lorsqu'elles sont dirigées verticalement, — sont deux à deux symétriques par rapport à la verticale dont il s'agit.

2° *Le centre o''' relatif à une section* C *quelconque, se trouve sur l'horizontale du centre fixe o' de la travée.*

En effet, par rapport aux axes $o'x'$ et $o'y'$, l'ordonnée du centre o''' correspondant à la section C, est donnée par la dernière des formules (*d*) (§ 46, p. 56):

$$\delta''' = \frac{\int_A^B \frac{x'y'}{I}\,ds}{\int_A^B \frac{ds}{I}}\,\frac{1}{c'}.$$

Or $o'y'$ étant un axe de symétrie de la ligne moyenne considérée comme une ligne matérielle dont le poids de chaque élément de longueur *ds* aurait pour valeur $\frac{ds}{I}$, on a

$$\int_A^B \frac{x'y'}{I}\,ds = o,$$

par suite $\delta''' = o.$

o''' se trouve donc sur l'horizontale $o'x'$ du centre fixe de la travée.

Il résulte de ce qui précède que les droites $o'o''$ et $o'o'''$ coïncident respectivement avec les axes $o'y'$ et $o'x'$, et que les lignes $o'q'$, $o''q''$, $o'''q'''$, considérées dans le cas général, deviennent respectivement : $o'q' = o'o''$, $o''q'' = o''o'$ et $o'''q''' = \infty$.

La détermination du centre fixe o' de la travée n'exige que le tracé d'un seul polygone funiculaire,—celui des efforts fictifs $\frac{\Delta s}{I}$, ou mieux $b\frac{\frac{1}{n}I}{I}$, dirigés horizontalement, puisqu'on sait que ce centre

Digitized by Google

se trouve sur la verticale du milieu de la corde de l'arc. En raison de la symétrie, le tracé pourra ne porter que sur les forces fictives correspondantes à une moitié seulement de l'arc.

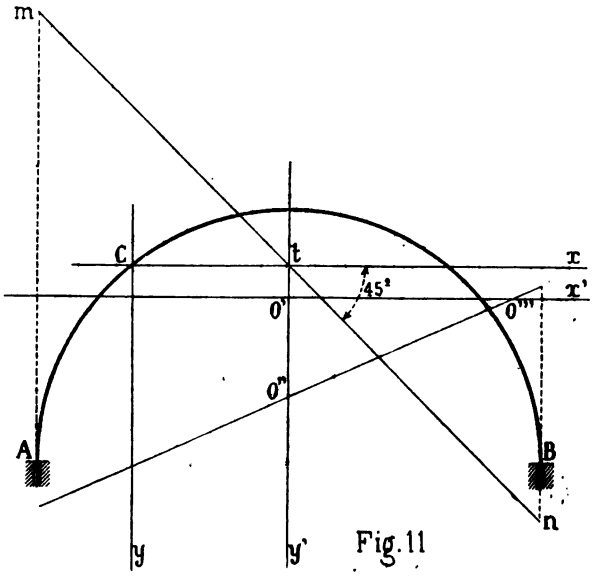


Fig. 11

De même, la détermination du centre o'' correspondant à une section C arbitrairement choisie, n'exigera que le tracé d'un seul polygone funiculaire, celui des forces fictives horizontales $\frac{y}{I}\Delta s$, ou mieux $y\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$; le tracé pourra ne porter que sur une moitié de l'arc.

Enfin, la construction du centre o''' correspondant à cette section ne nécessitera que le tracé du seul polygone funiculaire des forces fictives verticales $\frac{x}{I}\Delta s$, ou mieux $x\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, puisqu'on sait que ce centre est situé sur l'horizontale $o'x'$.

Digitized by Google

LIGNES D'INFLUENCE DES QUANTITÉS M, X ET Y, CORRESPONDANTES A UNE SECTION C ARBITRAIREMENT CHOISIE.

La construction des lignes d'influence des quantités M et X reste exactement celle indiquée pour le cas général de l'arc dissymétrique (§ 45).

Il faut remarquer que, dans le cas particulier qui nous occupe, le polygone funiculaire des efforts fictifs $(y - z'')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, — et par suite la ligne d'influence de X, qui se confond avec lui, — est symétrique par rapport à la verticale du milieu de la corde de l'arc, parce qu'en raison de l'horizontalité de la droite $o'o'''$, les efforts fictifs $(y - z'')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ sont deux à deux symétriques par rapport à cette verticale.

Quant à la règle donnée dans le cas général pour le tracé de la ligne d'influence de Y, elle est en défaut lorsque l'arc est symétrique.

En effet, le polygone funiculaire d'où, d'après ce tracé, on doit déduire cette ligne d'influence, correspond à des forces fictives verticales ayant pour valeur générale $(y - z''')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, où $(y - z''')$ représente les portions de verticales comprises entre la ligne moyenne de l'arc et la droite $o'o''$; or, ici, cette droite se confond avec l'axe vertical de symétrie de l'arc ; donc les segments $y - z'''$, et par suite les forces fictives $(y - z''')\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, sont infinis. Pour la même raison, la longueur $o'''q'''$ est infinie, et il en est de même de la distance polaire B''' qui lui est proportionnelle (§ 45).

Les forces et la distance polaire étant infinies, le polygone funiculaire correspondant est indéterminé. La construction générale est donc illusoire lorsque l'arc est symétrique.

Reprenons les deux dernières formules des groupes (7) et (7') du § 43 (p. 40) :

1° *Lorsque la charge mobile se trouve sur la partie d'arc* BC :

$$(a) \quad -(o'''q''')\varphi''' \quad Y = P \overset{D..R}{\underset{D}{M}} Y \left[y - \frac{-(d''-d')x + c'd'' - c''d'}{c' - c''} \right] \frac{ds}{I};$$

Digitized by Google

2° *Lorsque la charge mobile se trouve sur la partie d'arc* AC :

$$(a') \qquad -(o'''q''')\varphi'''Y = -P\overset{D.A}{\underset{D}{MY}}\left[y - \frac{-(d''-d')x + c'd'' - c''d'}{c'-c''}\right]\frac{ds}{I}.$$

Dans le cas où l'arc est symétrique, les centres o' et o'' étant situés sur la verticale de symétrie, on a

$$c' = c''; \qquad \text{d'où} \qquad c' - c'' = 0.$$

D'autre part $o'''q'''$ est infini, ainsi qu'il vient d'être dit. Donc, d' étant essentiellement différent de d'', les formules précédentes se présentent sous la forme illusoire

$$\infty = \infty.$$

Pour lever l'indétermination, chassons le dénominateur $c' - c''$ et remplaçons le produit $(o'''q''')(c' - c'')$ par sa valeur résultant des formules (l) et (i) du § 42, savoir :

$$(o'''q''')(c' - c'') = c'd'' + c''d''' + c'''d' - c'd''' - c''d' - c'''d'';$$

puis, tenons compte de l'égalité $c' = c''$ et enfin supprimons la quantité $(d'' - d')$ qui apparaît alors en facteur commun ; il vient :

$$(a_1) \qquad -(c' - c''')\varphi''' Y = P\overset{D.B}{\underset{D}{MY}}(x - c')\frac{ds}{I},$$

$$(a'_1) \qquad -(c' - c''')\varphi''' Y = -P\overset{D.A}{\underset{D}{MY}}(x - c')\frac{ds}{I}.$$

Posons

$$(b) \qquad z''' = x - c'.$$

D'où :

1° *Lorsque la charge mobile se trouve sur la partie d'arc* BC :

$$(1) \qquad -(c' - c''')\varphi''' Y = P\overset{D.B}{\underset{D}{MY}}\frac{z'''}{I}ds.$$

2° *Lorsque la charge mobile se trouve sur la partie d'arc* AC :

$$(1') \qquad -(c' - c''')\varphi''' Y = -P\overset{D.A}{\underset{D}{MY}}\frac{z'''}{I}ds.$$

En regardant x et z''' comme des coordonnées courantes, l'équation (b) représente une droite mn (*fig. 11*, p. 64) faisant un angle de + 45° avec la partie positive Cx de l'axe des x, et passant par le point d'intersection t de cet axe avec la verticale de symétrie de l'arc.

En comparant les relations (1) et (1') avec les troisièmes équations de chacun des groupes (9) et (9') du § 43, on voit qu'elles n'en diffèrent que par la substitution des quantités $(c' - c''')$ et z''' à celles $(o'''q''')$ et $(y - z''')$. Par conséquent les deux théorèmes du § 43, énoncés pour l'arc dissymétrique, restent vrais pour l'arc symé-

Digitized by Google

trique, à la condition de substituer aux efforts fictifs $\frac{y-z'''}{I} ds$, des efforts fictifs égaux à $\frac{z'''}{I} ds$, z''' représentant l'ordonnée de la droite qui vient d'être définie.

La construction de la ligne d'influence de Y est donc ramenée au tracé d'une courbe funiculaire correspondante à des efforts fictifs verticaux $\frac{z'''}{I} ds$.

On démontrerait comme au § 44 que les tangentes aux extrémités de cette courbe sont parallèles.

Pratiquement on la remplacera par un polygone funiculaire correspondant à des efforts fictifs $z''' \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, polygone que l'on construira conformément aux indications données au § 45 pour le tracé du polygone funiculaire des $(y - z)''' \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$.

Si on a soin de prendre pour distance polaire une longueur

$$B''' = - \frac{(\overline{c'} - \overline{c'''}) \overline{\Phi'''}}{\overline{P}},$$

les segments de verticales compris entre ce polygone et ses côtés extrêmes parallèles, prolongés jusqu'à la verticale du point C, seront égaux aux ordonnées de la ligne d'influence de Y qu'on obtiendra alors par une translation partielle dudit polygone (§ 45).

LIGNES D'INFLUENCE DES QUANTITÉS M, X ET Y CORRESPONDANTES AUX DIVERSES SECTIONS DE L'ARC

Les indications données pour le cas général, au § 46, s'appliquent encore lorsque l'arc est de structure symétrique, sous la seule condition de remplacer dans le *Théorème II* et dans la *Conclusion*, les forces fictives $(y - z''') \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ par celles $z''' \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ envisagées ci-dessus, et les produits $(o'''q''') \varphi'''$ et $(o''q''') \Phi'''$ par ceux $(c' - c''') \varphi'''$ et $(c' - c''') \Phi'''$. Nous nous bornerons donc à renvoyer à ce paragraphe.

Nous ferons remarquer, toutefois, que la construction des centres

Digitized by Google

o''_1 et o'''_1 correspondants à une section C_1, — étant donnés ceux o'' et o''' correspondants à une section C, — doit être modifiée, parce que les droites $o'o''$ et $o'o'''$ coïncident respectivement avec $o'x'$ et $o'y'$. Nous nous appuierons encore sur les relations (f) du § 46

$$(f) \qquad \frac{o'o''}{o'o''_1} = \frac{\eta_1}{\eta} \quad \text{et} \quad \frac{o'o'''}{o'o'''_1} = \frac{\xi_1}{\xi},$$

qui conduisent immédiatement à la construction suivante (*fig. 12*):

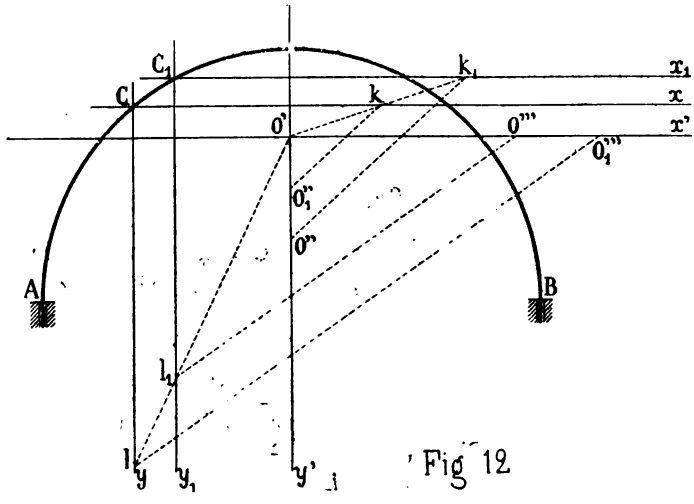


Fig 12.

Par o' mener une divergente quelconque qui coupe Cx en k et C_1x_1 en k_1, tirer $o''k_1$ et par k mener à cette ligne une parallèle qui rencontre $o'y'$ au point o''_1 cherché.

De même, par o' mener une divergente quelconque qui coupe Cy en l et C_1y_1 en l_1, tirer $o'''l_1$ et par l mener à cette droite une parallèle qui rencontre $o'x'$ au point o'''_1 cherché.

§ 48. — Ligne d'influence de la tension élastique par unité de surface, développée en un point donné d'une fibre arbitrairement choisie (*).

Proposons-nous de déterminer la ligne d'influence de la tension élastique rapportée à l'unité de surface, développée dans une fibre quelconque donnée de l'arc, à la rencontre d'une section C arbitrairement choisie.

(*) Il est clair que, dans les applications, on n'aura à considérer que les fibres extrêmes supérieures et inférieures, qui sont les plus fatiguées.

Digitized by Google

Soient : v la distance de cette fibre au centre de gravité de la section, distance qui est positive ou négative, suivant que la fibre considérée est située au-dessous ou au-dessus de la ligne moyenne; I_c le moment d'inertie et ρ le rayon de giration de cette section autour d'un axe horizontal passant par le centre de gravité; S_c l'aire de la section; α l'angle de la partie descendante de la normale en C à la ligne moyenne, avec la verticale descendante de C, — angle qui est positif ou négatif, suivant qu'il est situé à gauche ou à droite de cette verticale.

La force élastique dont il s'agit a pour expression connue

$$R = \frac{vM}{I_c} - \frac{N}{S_c} = \frac{1}{S_c}\left(\frac{vM}{\rho^2} - N\right).$$

Mais on a, d'autre part,

$$N = X\cos\alpha + Y\sin\alpha;$$

donc,

$$(a) \qquad R = \frac{v}{S_c\rho^2}M - \frac{\cos\alpha}{S_c}X - \frac{\sin\alpha}{S_c}Y.$$

On pourrait déterminer d'abord les lignes d'influence des quantités M, X et Y afférentes à la section C, et en déduire, par la construction plusieurs fois répétée de l'expression (a), autant de points qu'on voudrait de la ligne d'influence de R; mais cette marche serait assez laborieuse.

Nous allons montrer comment on peut tracer directement la ligne d'influence de R sans passer par l'intermédiaire des lignes d'influence de M, de X et de Y.

Reprenons les équations (9) et (9′) du § 43; tirons-en M, X et Y, et substituons dans (a); il vient, en groupant les termes et en introduisant certains coefficients constants sous le signe $\overset{D.B}{\underset{D}{MY}}$

1° *Lorsque le point d'application* D *de la charge mobile se trouve sur la partie d'arc* BC :

$$(b) \quad R = \frac{P}{S_c}\overset{D.B}{\underset{D}{MY}}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{vb}{\rho^2}\times\frac{1}{(o'q')\varphi'} - \cos\alpha\frac{1}{(o'q')\varphi'} + \sin\alpha\frac{1}{(o''q'')\varphi''}\right]y \\ -\left[\frac{vb}{\rho^2}\times\frac{1}{(o'q')\varphi'}z' - \cos\alpha\frac{1}{(o'q')\varphi'}z' + \sin\alpha\frac{1}{(o''q'')\varphi''}z''\right]\end{array}\right\}\frac{ds}{I}.$$

2° *Lorsque le point d'application* D *de la charge mobile se trouve sur la partie d'arc* AC :

$$(b') \quad R = -\frac{P}{S_c}\overset{D.A}{\underset{D}{MY}}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{vb}{\rho^2}\times\frac{1}{(o'q')\varphi'} - \cos\alpha\frac{1}{(o''q'')\varphi''} + \sin\alpha\frac{1}{(o''q'')}\right]y \\ -\left[\frac{vb}{\rho^2}\times\frac{1}{(o'q')\varphi'}z' - \cos\alpha\frac{1}{(o''q'')\varphi''}z'' + \sin\alpha\frac{1}{(o''q'')\varphi''}z''\right]\end{array}\right\}\frac{ds}{I}.$$

Digitized by Google

Posons

$$(c)\quad Z=\frac{\dfrac{vb}{\rho^2}\times\dfrac{1}{(o'q')\,\varphi'}z'-\cos\alpha\dfrac{1}{(o''q'')\varphi''}z''+\sin\alpha\dfrac{1}{(o'''q''')\,\varphi'''}z'''}{\dfrac{vb}{\rho^2}\times\dfrac{1}{(o'q')\,\varphi'}-\cos\alpha\dfrac{1}{(o''q'')\,\varphi''}+\sin\alpha\dfrac{1}{(o'''q''')\,\varphi'''}};$$

les équations (b) et (b') deviennent dès lors :

$$(b_1)\quad R=\frac{P}{S_c}\left(\frac{vb}{\rho^2}\times\frac{1}{(o'q')\,\varphi'}-\cos\alpha\frac{1}{(o''q'')\,\varphi''}+\sin\alpha\frac{1}{(o'''q''')\,\varphi'''}\right)\overset{D\cdot B}{\underset{D}{M}}Y\frac{y-Z}{I}\,ds,$$

$$(b'_1)\quad R=-\frac{P}{S_c}\left(\frac{vb}{\rho^2}\times\frac{1}{(o'q')\,\varphi'}-\cos\alpha\frac{1}{(o''q'')\,\varphi''}+\sin\alpha\frac{1}{(o'''q''')\,\varphi'''}\right)\overset{D\cdot A}{\underset{D}{M}}Y\frac{y-Z}{I}\,ds.$$

Cela posé, si on regarde Z comme une ordonnée courante, l'équation (c) est celle d'une droite rapportée aux axes Cx et Cy, puisque z', z'' et z''' sont des fonctions linéaires en x données par les équations (8) du § 43, lesquelles représentent les trois côtés du triangle formé par le centre fixe o' de la travée et par les centres o'' et o''' correspondants à la section C.

Soit st cette droite *(fig. 13)*.

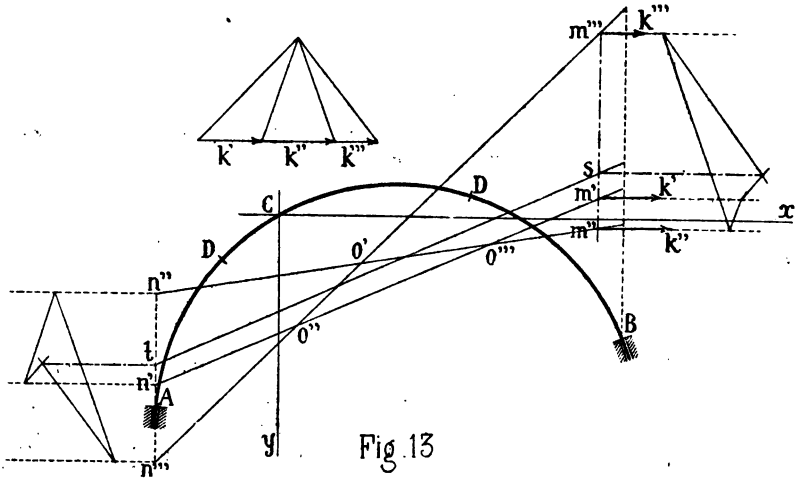


Fig. 13

Dès lors, dans les relations (b_1) et (b'_1), $(y-Z)$ représente les segments de verticales interceptés par la droite (c) et la ligne moyenne de l'arc ; ces segments sont positifs pour les points de la ligne moyenne situés au-dessous de la droite (c) et négatifs pour les autres.

Si on remarque que les coefficients des termes en MY sont

Digitized by Google

constants pour la section et la fibre considérées, on conclut immédiatement des équations (b_1) et (b'_1) que :

THÉORÈME I. — *Étant donnés un arc* AB *encastré à ses extrémités, parcouru par une charge mobile* P, *et une fibre quelconque de cet arc rencontrée par une section* C *arbitrairement choisie, si on applique, tout le long de la ligne moyenne de l'arc, des forces fictives verticales* $\frac{y-Z}{I}ds$, $(y—Z)$ désignant les segments de verticales compris entre la ligne moyenne et la droite (c) :

1° La somme des moments par rapport à un point quelconque D *de la ligne moyenne, situé entre la section* C *et la retombée* B, *des forces fictives* $\frac{y-Z}{I}ds$ *réparties entre* D *et* B, *est proportionnelle à la tension élastique* R *par unité de surface, produite dans la fibre considérée à la rencontre de la section* C, *à l'instant où la charge mobile passe en* D.

2° La somme des moments par rapport à un point quelconque D *de la ligne moyenne, situé entre la section* C *et la retombée* A, *des forces fictives réparties entre* D *et* A, *est proportionnelle à la tension élastique* R *par unité de surface, produite dans la fibre considérée à la rencontre de la section* C, *à l'instant où la charge mobile passe en* D.

En se reportant à une propriété connue des courbes funiculaires et à la définition des lignes d'influence, on transforme comme suit le théorème qui précède.

THÉORÈME II. — *Étant donnés un arc encastré à ses deux extrémités, parcouru par une charge mobile* P, *et une fibre quelconque de cet arc rencontrée par une section* C *arbitrairement choisie, si on applique, tout le long de la ligne moyenne de l'arc, des forces fictives* $\frac{y-Z}{I}ds$, *qu'avec une distance polaire arbitraire on construise la courbe funiculaire correspondante, qu'on mène des tangentes aux extrémités de cette courbe et qu'on les limite à la verticale du point* C :

Les segments de verticales compris entre cette courbe et les deux tangentes, sont proportionnels aux ordonnées de la ligne d'influence de la tension élastique R *par unité de surface, produite dans la fibre considérée à la rencontre de la section* C.

Des considérations qui précèdent, il résulte que la détermination des ordonnées de la ligne d'influence de la tension R nécessite seulement :

1° La construction de la droite (c) ;

Digitized by Google

2° Le tracé d une courbe funiculaire correspondante aux efforts fictifs verticaux $\frac{y - Z}{I} ds$.

Voici comment ces opérations peuvent être effectuées :

1° *Construction de la droite* (*c*) (*). — Supposons qu'on ait déterminé, conformément aux indications du § 38, les longueurs Φ', Φ'', Φ''', le centre fixe o' de la travée et les centres o'' et o''' correspondants à la section C.

Dans l'équation (*c*) remplaçons φ', φ'', φ''' par les quantités Φ', Φ'', Φ''', qui leur sont respectivement proportionnelles, en vertu des formules (2), (3) et (4) du § 38 ; il vient, en posant

$$k' = \frac{vb}{\rho^2} \times \frac{1}{(o'q')\,\Phi'}, \quad k'' = -\frac{\cos\alpha}{(o''q'')\,\Phi''}, \quad k''' = \frac{\sin\alpha}{(o'''q''')\Phi'''} :$$

$$(c_1) \qquad Z = \frac{k'z' + k''z'' + k'''z'''}{k' + k'' + k'''}.$$

Considérons maintenant les trois points d'intersection respectifs m', m'' et m''' des droites $o''o'''$, $o'o'''$ et $o'o''$, avec une verticale quelconque (*fig. 13*); appliquons en ces points trois forces parallèles d'intensités égales à k', k'' et k'''. Le centre s de ces forces parallèles appartient à la droite (*c*) ; en effet, dirigeons-les horizontalement et prenons-en les moments par rapport au plan horizontal dont la trace sur le plan de la ligne moyenne est Cx ; on a, en désignant par Z l'ordonnée du point s,

$$k'z' + k''z'' + k'''z''' = (k' + k'' + k''')\,Z ;$$

c'est précisément la relation (c_1).

Pour déterminer géométriquement le point s, formons, à une échelle quelconque, un polygone des forces horizontales k', k'' et k''', en ayant égard à leurs signes ; puis, avec une distance polaire arbitraire, traçons le polygone funiculaire correspondant ; l'horizontale menée par le point de concours des côtés extrêmes de ce polygone funiculaire, est la ligne d'action de la résultante $(k' + k'' + k''')$ et coupe, par conséquent, la verticale $m'm''m'''$ au point s cherché.

On répétera cette construction relativement aux points d'intersection n', n'' et n''' des trois droites $o''o'''$, $o'o'''$ et $o'o''$ avec une autre verticale, en utilisant d'ailleurs le même polygone des forces ; on obtiendra ainsi un second point t de la droite (*c*) qui sera dès lors connue.

On pourra choisir comme verticales celles des points A et B.

(*) Voir au n° 2 de la *Note I*, un théorème qui fournit un autre mode de construction de la droite (c).

Digitized by Google

2° Tracé de la courbe funiculaire des efforts fictifs verticaux $\frac{y-Z}{I}ds$.—
On divisera la ligne moyenne de l'arc en un certain nombre de parties Δs égales entre elles (*) et on substituera à la courbe funiculaire dont il s'agit, un polygone funiculaire correspondant à des efforts fictifs finis $(y-Z)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, ainsi qu'il a déjà été fait au § 45.

Dans les équations (b_1) et (b'_1), remplaçons φ', φ'' et φ''' par leurs valeurs tirées de (2) (3) et (4) du § 38, et introduisons les efforts fictifs finis $(y-Z)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$; il vient

$$(b_2)\quad R=\frac{P}{S_c}\left(\frac{vb}{\rho^2}\times\frac{1}{(o'q')\Phi'}-\frac{\cos\alpha}{(o''q'')\Phi''}+\frac{\sin\alpha}{(o'''q''')\Phi'''}\right)\overset{D.B}{\underset{D}{MY}}(y-Z)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I},$$

$$(b'_2)\quad R=-\frac{P}{S_c}\left(\frac{vb}{\rho^2}\times\frac{1}{(o'q')\Phi'}-\frac{\cos\alpha}{(o''q'')\Phi''}+\frac{\sin\alpha}{(o'''q''')\Phi'''}\right)\overset{D.A}{\underset{D}{MY}}(y-Z)\frac{\frac{I}{n}I_m}{I}.$$

Remarquons que $\frac{vb}{\rho^2}$, $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ sont des quantités sans dimension, tandis que $(o'q')$, $(o''q'')$, $(o'''q''')$, Φ', Φ'' et Φ''' sont des longueurs; on peut donc poser, en désignant par m et m' deux longueurs, dont l'une peut être choisie arbitrairement,

$$(d)\quad \frac{vb}{\rho^2}\times\frac{1}{(o'q')\Phi'}-\frac{\cos\alpha}{(o''q'')\Phi''}+\frac{\sin\alpha}{(o'''q''')\Phi'''}=k'+k''+k'''=\frac{1}{m\times m'};$$

Posons en outre

$$(e)\qquad \frac{P}{S_c}=p;$$

p représente par conséquent la charge P rapportée à l'unité de section transversale S_c.

D'autre part, si, avec une distance polaire arbitraire B, on trace un polygone funiculaire des efforts fictifs $(y-Z)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ et qu'on en prolonge les côtés extrêmes jusqu'à la verticale du point C, on a,

(*) Le nombre des divisions doit être le même que celui adopté pour la construction des centres et des longueurs Φ', Φ'' et Φ''' (§ 38).

Digitized by Google

en désignant par KH le segment de la verticale d'un point quelconque D de l'arc, intercepté par le polygone et les prolongements des côtés extrêmes :

1° *Si le point* D *est situé sur la partie d'arc* BC,

$$(f) \qquad + \underset{D}{\overset{D,B}{M}}Y\,(y - Z)\,\frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I} = B \times KH\,;$$

2° *Si le point* D *est situé sur la partie d'arc* AC,

$$(g) \qquad - \underset{D}{\overset{D,A}{M}}Y\,(y - Z)\,\frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I} = B \times KH.$$

Les équations (b_2) et (b'_2) deviennent, l'une et l'autre, à cause de (d), (e), (f) et (g),

$$(b_3) \qquad R = \frac{p \times B}{m \times m'} \times KH,$$

quelle que soit la position du point d'application D de la charge mobile.

Si nous désignons maintenant par $\frac{1}{f}$ l'échelle des forces et par $\frac{1}{l}$ l'échelle des longueurs, on a, conformément aux notations du § 45 :

$p = \overline{p} \times f$, $B = \overline{B} \times l$, $m = \overline{m} \times l$, $m' = \overline{m'} \times l$, $KH = \overline{KH} \times l$;

d'où, en substituant dans (b_3),

$$(b_4) \qquad R = \left(\frac{\overline{p} \times \overline{B}}{\overline{m} \times \overline{m'}} \times \overline{KH}\right) f.$$

Si, enfin, dans le tracé du polygone funiculaire des $(y - Z)\,\frac{\frac{1}{n}\,I_m}{I}$, on a eu soin de prendre comme distance polaire, la valeur

$$\overline{B} = \frac{\overline{m} \times \overline{m'}}{\overline{p}}\,, \qquad (*)$$

on a

$$(b_5) \qquad R = \overline{KH} \times f\,;$$

et l'on peut dire, par conséquent, que, dans ces conditions, l'un quelconque des segments de verticales, tel que $\overline{KH}$, représente, *à l'échelle des forces*, la valeur que prend R lorsque la charge mobile P passe à l'aplomb de ce segment, ou, autrement dit, que les seg-

(*) Voir au n° 4 de la *Note I*, une expression plus simple de $\overline{B}$.

Digitized by Google

ments $\overline{KH}$ sont égaux aux ordonnées de la ligne d'influence de R.

En portant ces ordonnées à partir d'une horizontale quelconque UU', choisie comme axe des abscisses, on aura la ligne d'influence en question.

On simplifiera cette dernière opération en ayant soin de diriger horizontalement le premier rayon polaire du polygone des forces fictives $(y-Z)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, et de faire coïncider avec UU' le premier côté du polygone funiculaire correspondant, ainsi que nous l'avons déjà indiqué pour la construction des lignes d'influence de M, de X et de Y (§ 45).

Cas particulier où l'arc est de structure symétrique par rapport a la verticale du milieu de la corde.

Dans ce cas, les valeurs de M et de X à substituer dans la formule (*a*), sont encore données par les équations des groupes (9) et (9') du § 43, mais celle de Y est fournie par les équations (1) et (1') du § 47 (page 66).

En suivant la marche précédemment exposée, et en conservant les mêmes notations que ci-dessus, on arrive aux équations suivantes :

$$(b_6)\qquad R=\frac{P}{S}\left(\frac{vb}{\rho^2}\times\frac{1}{(o'q')\Phi'}-\frac{\cos\alpha}{(o''q'')\Phi''}\right)\underset{D}{\overset{D.B}{MY}}(y-Z_1)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I},$$

$$(b'_6)\qquad R=-\frac{P}{S_c}\left(\frac{vb}{\rho^2}\times\frac{1}{(o'q')\Phi'}-\frac{\cos\alpha}{(o''q'')\Phi''}\right)\underset{D}{\overset{D.A}{MY}}(y-Z_1)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I},$$

analogues à celles (b_2) et (b'_2), et où

$$(c_3)\qquad Z_1=\frac{k'z'+k''z''+k'''z'''}{k'+k''+k'''}\times\frac{k'+k''+k'''}{k'+k''},$$

k', k'' et k''' ayant pour valeurs

$$k'=\frac{vb}{\rho^2}\times\frac{1}{(o'q')\Phi'},\quad k''=-\frac{\cos\alpha}{(o''q'')\Phi''},\quad k'''=+\frac{\sin\alpha}{(c'-c''')\Phi'''}.$$

L'équation (c_2) représente une droite ; pour la construire, on déterminera d'abord la droite qui aurait pour équation

$$Z'_1=\frac{k'z'+k''z''+k'''z'''}{k'+k''+k'''},$$

Digitized by Google

par la méthode indiquée dans le cas général pour la droit
puis on en multipliera les ordonnées par le rapport de $k' + k''$
à $k' + k''$.

Cela fait, on posera

$$(d_1) \qquad \frac{vb}{\rho^2} \times \frac{1}{(o'q')\,\Phi'} - \frac{\cos\alpha}{(o'q'')\,\Phi''} = \frac{1}{m \times m'}$$

et

$$(e) \qquad \frac{P}{S_c} = p.$$

Puis, avec une distance polaire $\overline{B} = \frac{\overline{m} \times \overline{m}'}{\overline{p}}$, on tracera un

gone funiculaire des efforts fictifs verticaux $(y - Z_1)\ \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ e

en prolongera les côtés extrêmes jusqu'à la verticale du poi

Les segments de verticales, interceptés par ce polygone
côtés extrêmes, seront égaux aux ordonnées de la ligne d'influ
de R, qu'il sera dès lors facile de construire.

Comme nous l'avons dit plus haut, il sera avantageux d
riger horizontalement le premier rayon polaire du polygon

$(y - Z_1)\ \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, et de faire coïncider avec UU' le côté correspo
du polygone funiculaire.

Remarque. — Il est clair que la méthode que nous venons
poser pour la détermination des lignes d'influence des f
élastiques R, est applicable à la recherche de la ligne d'influ
de toute quantité pouvant être exprimée par une fonction lin
des valeurs simultanées de M, de X et de Y.

On pourra l'employer, par exemple, pour la construction
lignes d'influence de la tension longitudinale N (*) et de l'
tranchant T en une section C quelconque, lesquels sont do
par les formules

$$N = X \cos\alpha + Y \sin\alpha,$$
$$T = -X \sin\alpha + Y \cos\alpha,$$

dont les seconds membres sont des fonctions linéaires en
et où les coefficients de M ont la valeur particulière 0.

(*) Voir Tome I, n° 2, corollaire II.

Digitized by Google

TROISIÈME SECTION

Effets des variations de température.

§ 49.

Proposons-nous de déterminer le moment fléchissant M et les composantes X et Y de la résultante de translation des forces élastiques développées, en une section quelconque C de l'arc, par une variation de température de t^o à partir de celle du montage.

Nous nous servirons des équations (6) du § 42 (page 36).

Choisissons pour direction de X celle de la corde AB de l'arc, ce qui nous conduit à mener l'axe Cx parallèle à cette corde et Cy perpendiculaire (*fig. 14*). Supposons que le centre fixe o' de la travée et les centres o'' et o''' correspondants à la section C et à ces directions d'axes, aient été déterminés par la méthode connue.

Les déplacements linéaires et angulaires qui entrent dans les seconds membres des équations (6) précitées, sont ceux que prendraient, par l'effet des variations de température, les extrémités (1) et (2) des deux tronçons A(1) et B(2) de l'arc supposé coupé suivant la section C.

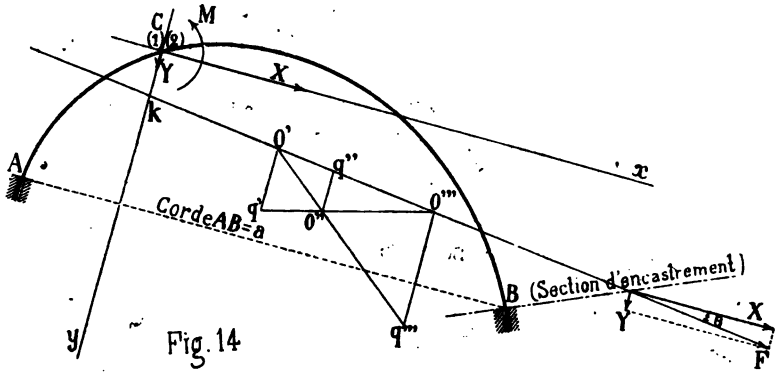


Fig. 14

Ces tronçons étant libres, se déforment en restant géométriquement semblables à eux-mêmes, et on a, en désignant par α le coefficient de dilatation du métal, par x_A et x_B les abscisses des

Digitized by Google

extrémités de l'arc, et par $y_A = y_B$ l'ordonnée commune des dit extrémités,

$$(l'_x)_2 = -\alpha t x_B\ , \qquad (l'_y)_2 = -\alpha t y_B\ , \qquad g'_2 = 0,$$
$$(l'_x)_1 = -\alpha t x_A\ , \qquad (l'_y)_1 = -\alpha t y_A\ , \qquad g'_1 = 0,$$

t étant supposé positif dans le cas d'une élévation de températu et négatif dans le cas d'un abaissement.

Substituons dans les équations (6), en tenant compte des rel tions $y_B = y_A$ et $x_B - x_A = a$, où a représente la longueur de corde de l'arc ; il vient

$$(a) \qquad \frac{M}{b} = \frac{E\alpha t a}{(o'q')\,\varphi'}\ ,$$

$$(b) \qquad X = \frac{E\alpha t a}{(o''q'')\varphi''}\ ,$$

$$(c) \qquad Y = -\frac{E\alpha t a}{(o'''q''')\,\varphi'''}\ .$$

Ces formules résolvent le problème posé.

Conséquences.—On sait que les produits $(o''q'')\varphi''$ et $(o'''q''')\varphi'''$ reste constants, lorsque le point C décrit la ligne moyenne de l'arc et qu les axes Cx et Cy se déplacent parallèlement à eux-mêmes. Il e résulte que X et Y sont constants pour toutes les sections de l'arc M seul varie. Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*.

Comme on peut, en particulier, prendre la section C à l'encastre ment B de l'arc, on voit que X et Y sont aussi les composantes d la réaction totale en cet encastrement.

Cette réaction totale ne passe pas par le centre de gravité de l section B, puisque l'arc n'est pas articulé ; représentons-la par *(fig. 14)*.

Théorème. — *Les lignes d'action des réactions totales développées au encastrements de l'arc par une variation de température, coïncident av la droite* o′ o‴ (*).

Nous ne ferons la démonstration que pour l'encastrement Considérons toujours une section quelconque C et les axes Cx Cy définis plus haut.

Soit K le point d'intersection de Cy avec la ligne d'action de F représentons par ζ l'ordonnée CK.

F étant la seule force agissant à droite de C, et X et Y en étar les composantes parallèles aux axes, le moment fléchissant M en C, a pour expression

$$(d) \qquad M = -X\zeta\ ;$$

(*) Voir au n° 7 de la *Note I*, une transformation de ce théorème.

Digitized by Google

d'où, à cause de (*a*) et de (*b*),

$$\zeta = -\frac{M}{X} = -b \times \frac{(o''q'')\,\varphi''}{(o'q')\,\varphi'};$$

ou, en remplaçant $(o'q')$ et $(o''q'')$ par leurs valeurs tirées des relations (*l*) du § 42, et φ' et φ'' par leurs expressions (*e*) du § 37 :

$$\zeta = -\frac{(c'' - c''')\displaystyle\int_A^B \frac{y}{I}\,ds}{(c''' - c')\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}.$$

Mais o' étant, par définition, le centre des forces fictives parallèles $\frac{ds}{I}$ appliquées tout le long de l'arc, on a

$$\int_A^B y\frac{ds}{I} = d'\int_A^B \frac{ds}{I},$$

puisque d' est l'ordonnée de ce centre.

Par conséquent

$$\zeta = -\frac{(c'' - c''')\,d'}{c''' - c'} = \frac{c'''d' - c''d'}{c''' - c'}.$$

On vérifie aisément, d'autre part, que $c''d' = c'\,d'''$, car

$$c'' = \frac{\displaystyle\int_A^B \frac{xy}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{y}{I}\,ds}, \qquad c' = \frac{\displaystyle\int_A^B \frac{x}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}$$

$$d' = \frac{\displaystyle\int_A^B \frac{y}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{I}}, \qquad d''' = \frac{\displaystyle\int_A^B \frac{xy}{I}\,ds}{\displaystyle\int_A^B \frac{x}{I}\,ds}.$$

Digitized by Google

On peut donc écrire la valeur de ζ sous la forme

$$\zeta = \frac{c'''d' - c'd'''}{c''' - c'}.$$

Or, si dans l'équation de la droite $o'o'''$, qui est la seconde du groupe (8) du § 43, on fait $x = 0$, on trouve, pour l'ordonnée à l'origine de cette droite, la valeur

$$z'' = \frac{c'''d' - c'd'''}{c''' - c'}$$

qui est précisément celle de ζ.

D'où l'on conclut que le point K appartenant par hypothèse à la ligne d'action de F, se trouve sur la droite $o'o'''$.

On démontrerait de la même manière, par la considération d'une autre section C', qu'un autre point quelconque de cette ligne d'action se trouve encore sur $o'o'''$.

La ligne F coïncide donc avec $o'o'''$.

Conclusion. De ce qui précède, il résulte que la détermination des quantités M, X et Y, afférentes à toutes les sections de l'arc, pourra être effectuée comme suit :

On construira le centre fixe o' de la travée, puis les centres o'' et o''' correspondants à une section C arbitrairement choisie (les axes Cx et Cy ayant bien entendu les directions indiquées plus haut) et, en même temps, les quantités corrélatives Φ', Φ'' et Φ''' (§ 38).

La droite $o'o'''$ sera la ligne d'action commune des résultantes des réactions aux encastrements ; ce sera, en particulier, celle de la résultante F à l'encastrement de droite B.

On calculera ensuite la composante X par la formule (b) ci-dessus, en remplaçant ($o''q''$) par sa valeur mesurée sur l'épure à l'échelle des longueurs et φ'' par sa valeur exprimée, en fonction de la longueur Φ'', par la formule (3) du § 38, savoir :

$$\varphi'' = \frac{n\Delta s}{I_m}\,\Phi''.$$

La direction de F étant dès lors connue, ainsi que l'intensité de sa composante X parallèle à la corde de l'arc, la valeur de la composante Y s'ensuivra, soit par une construction géométrique d'ailleurs évidente, soit par la formule

$$Y = X \operatorname{tang} \theta,$$

où θ est l'angle de $o''o'''$ avec la corde de l'arc.

Ces valeurs de X et de Y sont les mêmes pour toutes les sections de l'arc.

Digitized by Google

Quant au moment fléchissant M en une section C quelconque, il sera donné par la formule (*d*)

$$M = - X\zeta ,$$

dans laquelle ζ représente le segment de perpendiculaire à la corde AB de l'arc, compris entre le point C et la ligne $o'o'''$, segment qui sera regardé comme positif si C est au-dessus de $o'o'''$, et comme négatif dans le cas contraire.

CAS PARTICULIER OU L'ARC EST DE STRUCTURE SYMÉTRIQUE PAR RAPPORT A LA PERPENDICULAIRE ÉLEVÉE SUR LE MILIEU DE LA CORDE. — Dans cette hypothèse, on a vu (§ 47) que la droite $o'o''$ se confondait avec la perpendiculaire menée sur le milieu de la corde; par suite, $o'''q'''$ est infini, et la composante Y est, dès lors, nulle en vertu de la formule (*c*), dont le numérateur a une valeur finie et dont le terme φ''' n'est pas nul.

La réaction totale F à l'encastrement de droite se réduit donc à X; elle est, par conséquent, parallèle à la corde AB de l'arc. Ce résultat était d'ailleurs évident *a priori*, puisque, dans le cas particulier dont il s'agit, la droite $o'o'''$, qui est précisément la ligne d'action de F, est parallèle à AB (§ 47).

CHAPITRE III

POUTRE DROITE CONTINUE. — POUTRE DROITE ENCASTRÉE

CHARGES MOBILES (*)

Lignes d'influence des moments fléchissants, des efforts tranchants et des réactions des appuis.

50. — Rappel de propriétés connues. — Hypothèses et Définitions.

PRINCIPE DE LA SUPERPOSITION DES EFFETS DES FORCES ET DES DÉNIVELLATIONS DES APPUIS. — Si une pièce dont la ligne moyenne est rectiligne avant toute déformation élastique, est posée sur un certain nombre d'appuis qui ne sont pas de niveau et si elle est, en outre, soumise à des charges quelconques, « le moment fléchissant et

(*) L'étude des effets produits par des charges fixes ayant fait l'objet d'un Mémoire précédent (*Calcul des poutres continues. Méthode générale analytique et méthode graphique.* — Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de septembre 1885, nous ne reviendrons pas ici sur cette question.

Digitized by Google

» l'effort tranchant qui se produisent en un point quelconque, » sous l'influence simultanée de ces charges et des dénivellations » des appuis, s'obtiennent en faisant la somme :

» 1° De ceux que chaque force agissant seule produirait, toutes » les autres étant supprimées et, de plus, tous les appuis étant » supposés de niveau ;

» 2° De ceux qui se produiraient s'il n'agissait aucune force, » par la seule influence des différences de niveau des appuis (*). »

Dans la recherche des lignes d'influence, nous supposerons toujours que les appuis sont de niveau.

Lorsque, en réalité, il n'en sera pas ainsi, il suffira, en vertu du principe précédent, d'ajouter au moment fléchissant et à l'effort tranchant, développés en un point quelconque sous l'action de la charge mobile, les quantités de même nature résultant des dénivellations des appuis.

Nous renvoyons d'ailleurs aux ouvrages classiques pour l'étude de ces dernières quantités.

Convention relative aux signes. — Les positions des différents points de la poutre, avant et après la déformation élastique, seront rapportées, dans chaque travée, à l'horizontale des appuis comme axe des x, et à la verticale de l'appui de gauche de la travée comme axe des y; le sens des x positifs sera celui de la gauche vers la droite; le sens des y positifs sera celui de la verticale descendante.

Il résulte de là qu'un segment donné de la droite des appuis devra être considéré comme positif ou comme négatif, suivant qu'il sera parcouru de la gauche vers la droite ou de la droite vers la gauche.

Les forces verticales seront affectées du signe + ou du signe — suivant qu'elles seront descendantes ou ascendantes.

Enfin, quand nous rapporterons un diagramme ou une courbe quelconque, à une horizontale comme axe des abscisses et à une verticale comme axe des ordonnées, le sens des abscisses positives sera celui de la gauche vers la droite, et le sens des ordonnées positives sera celui de la verticale descendante.

Points trisecteurs. — Résultantes trisectrices. — Si, en chaque point d'une travée quelconque, celle l_i par exemple, on applique une force fictive verticale, ayant pour inten-

(*) Maurice Lévy. — *Statique graphique :* II• partie, p. 167.

Digitized by Google

sité $\frac{x}{I}\,dx$, x étant l'abscisse de ce point rapportée à l'appui de gauche A_{i-1} de la travée *(fig. 15)*, la ligne d'action de la résultante de

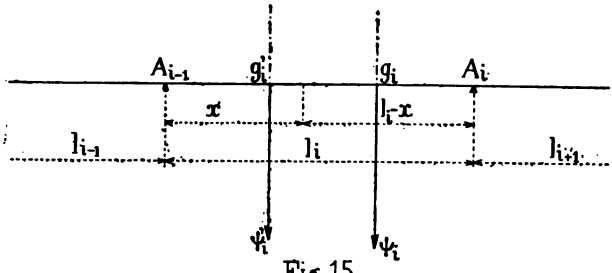


Fig. 15

ces forces est dite ***verticale trisectrice de droite***, et le point d'intersection g_i de cette ligne avec $A_{i-1}A_i$ est le ***point trisecteur de droite***

La résultante des forces fictives $\frac{x}{I}\,ds$, que nous appellerons ***résultante trisectrice de droite***, a pour valeur

(a) $$\psi_i = \int_0^{l_i} \frac{x}{I}\,dx,$$

et l'abscisse du point trisecteur de droite est égale à

(b) $$A_{i-1}g_i = \frac{\displaystyle\int_0^{l_i} \frac{x^2}{I}\,dx}{\displaystyle\int_0^{l_i} \frac{x}{I}\,dx}.$$

De même, si on applique, tout le long de la travée, des forces fictives verticales $\frac{l_i - x}{I}\,dx$, la ligne d'action de leur résultante est dite ***verticale trisectrice de gauche*** et le point d'intersection g_i' de cette ligne avec $A_{i-1}A_i$ est le ***point trisecteur de gauche.***

Digitized by Google

La résultante de ces forces fictives, que nous appellerons *résultante trisectrice de gauche*, a pour valeur

$$(a') \qquad \psi'_i = \int_0^{l_i} \frac{l_i - x}{I}\, dx,$$

et l'abscisse du point trisecteur de gauche est égale à

$$(b') \qquad A_{i-1}g'_i = \frac{\displaystyle\int_0^{l_i} \frac{(l_i - x)x}{I}\, dx}{\displaystyle\int_0^{l_i} \frac{l_i - x}{I}\, dx}.$$

Construction des verticales trisectrices et des valeurs des résultantes trisectrices. — Considérons, par exemple, la verticale trisectrice de gauche de la travée de rang i.

Si l'on trace une courbe funiculaire correspondante aux efforts fictifs verticaux $\frac{(l_i - x)}{I}\, dx$, répartis tout le long de la travée, les tangentes aux extrémités de cette courbe se couperont en un point de la résultante des dites forces fictives, c'est-à-dire sur la verticale trisectrice de gauche.

Pratiquement, on opérera conformément aux indications données au § 38 pour la construction des *centres* de l'arc encastré : on divisera la travée en un certain nombre de parties Δx égales entre elles (*), au milieu de chacune desquelles on appliquera un effort fictif égal à $(l_i - x)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ (x étant l'abscisse du point milieu de la division considérée, I le moment d'inertie de la section de la poutre en ce point, I_m le moment d'inertie d'une section arbitrairement choisie, et n un nombre quelconque); puis, partant du point A_{i-1}, on tracera un polygone de ces efforts *(fig. 16)*, lequel se réduit à une droite $A_{i-1}a_{i-1}$; enfin, avec une distance polaire quelconque, on construira le polygone funiculaire correspondant.

(*) Pour la simplicité des déterminations ultérieures, il conviendra de choisir, pour la longueur Δx, une commune mesure des portées de toutes les travées de la poutre. Cette commune mesure existe en général, car il est d'usage de constituer les poutres continues de panneaux d'égale largeur. Δx sera donc égal soit à la largeur totale d'un panneau, soit à une partie aliquote de cette largeur.

Digitized by Google

Les côtés extrêmes de ce polygone se couperont en un point γ appartenant à la verticale trisectrice cherchée.

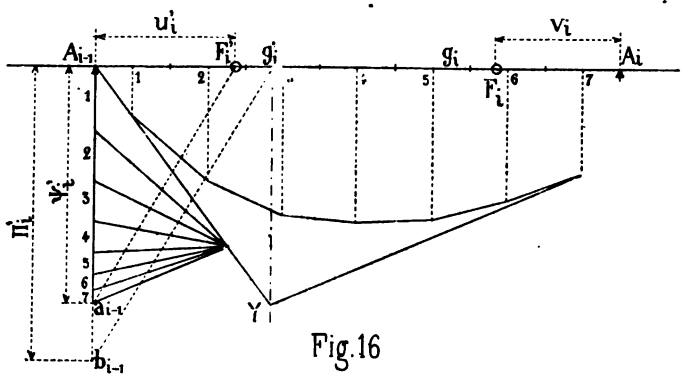


Fig.16

La verticale trisectrice de droite se construira de la même manière, mais en partant d'efforts fictifs égaux à $x\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$.

Nous représenterons par Ψ'_i la longueur $A_{i-1}a_{i-1}$ du polygone des efforts fictifs $(l_i - x)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ (*); elle est égale à

$$\Psi'_i = \sum_0^l (l_i - x)\frac{\frac{1}{n}I_m}{I} = \frac{I_m}{n\Delta x}\sum_0^{l_i}\frac{(l_i - x)}{I}\Delta x\,;$$

ou, à la substitution près de l'intégrale $\int_0^{l_i}\frac{l_i - x}{I}dx$ à la somme $\sum_0^{l_i}\frac{(l_i - x)}{I}\Delta x$,

$$(c') \qquad \Psi' = \frac{I_m}{n\Delta x}\int_0^{l_i}\frac{l_i - x}{I}dx = \frac{I_m}{n\Delta x}\psi'_i.$$

(*) On remarquera que Ψ'_i est une *longueur*; en effet, les efforts fictifs dont cette quantité représente la somme, sont des longueurs, puisque n est un *nombre* et $\frac{I_m}{I}$ un *rapport*.

Digitized by Google

De même, la longueur Ψ'_i du polygone des forces fictives $x\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ est égale à

$$(c) \qquad \Psi_i = \frac{I_m}{n\Delta x}\,\psi_i.$$

Des deux formules qui précèdent on tire les valeurs suivantes des résultantes trisectrices ψ'_i et ψ_i :

$$(d') \qquad \psi'_i = \frac{n\Delta x}{I_m}\,\Psi'_i.$$

$$(d) \qquad \psi_i = \frac{n\Delta x}{I_m}\,\Psi_i.$$

Foyers ou Points fixes. — Si la partie d'une poutre A_0A_n à appuis de niveau, comprise entre un appui quelconque A_k et l'un des appuis extrêmes, ne supporte aucune charge, quelles que soient les

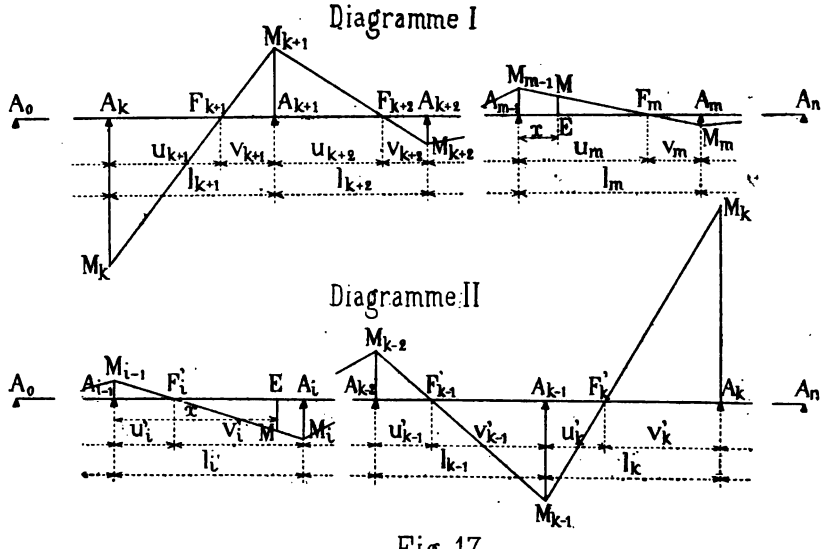


Fig. 17

charges agissant sur le restant de la poutre, — c'est-à-dire quelle que soit la valeur du moment fléchissant sur l'appui A_k, — le dia-

Digitized by Google

gramme des moments fléchissants, dans la partie non chargée, est une ligne polygonale concave dont les sommets se trouvent sur les verticales des appuis, alternativement au-dessus et au-dessous desdits appuis, et dont les côtés coupent la droite A_0A_n une fois dans chaque travée, en des points dits *Points fixes* ou *Foyers*.

Suivant que la partie non chargée est contiguë à l'appui extrême de droite, ou au contraire à l'appui extrême de gauche, les foyers correspondants se trouvent dans la moitié de droite de chaque travée (diagramme I, *fig. 17*), ou au contraire dans la moitié de gauche (diagramme II).

Dans le premier cas, ils portent le nom de *foyers de droite*, dans le second, celui de *foyers de gauche*.

Il y a donc dans toute travée, celle l_i par exemple, deux foyers, l'un de droite F_i, l'autre de gauche F'_i (*fig. 18*).

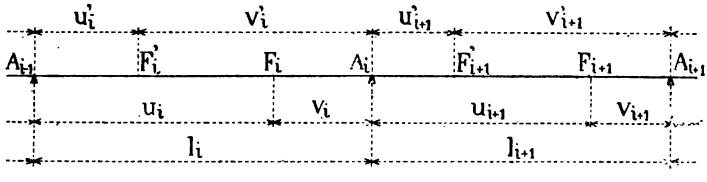


Fig. 18

Nous définirons la position de ces points par leurs distances essentiellement positives u_i et v_i, u'_i et v'_i, aux appuis de la travée à laquelle ils appartiennent.

Il résulte de ce qui précède et de l'examen du diagramme I (*fig. 17*), que si la partie de poutre A_kA_n est vide de charges, le moment fléchissant en un point quelconque E d'abscisse x, appartenant à une travée de rang $m > k$, est donné, en fonction du moment M_k sur l'appui A_k, par l'expression

$$(1) \qquad M = M_k \times \rho_{k+1} \times \rho_{k+2} \times \ldots\ldots \times \rho_{m-1} \times \frac{u_m - x}{u_m},$$

dans laquelle

$$\rho_{k+1} = \frac{-v_{k+1}}{u_{k+1}}, \ldots\ldots\ldots \rho_{m-1} = \frac{-v_{m-1}}{u_{m-1}},$$

en convenant de supprimer les facteurs ρ quand le point E est dans la travée du rang $k+1$.

Digitized by Google

Si, au contraire, c'est la partie A_0A_k qui est vide de charges, (diagramme II) le moment fléchissant en un point quelconque E d'abscisse x, appartenant à une travée de rang $i<k+1$, est donné par la formule

$$(2) \qquad M = M_k \times \rho'_k \times \rho'_{k-1} \times \dots\dots \rho'_{i+1} \times \frac{x-u'_i}{v'_i},$$

dans laquelle

$$\rho'_k = \frac{-u'_k}{v'_k}, \dots\dots\dots \rho'_{i+1} = \frac{-u'_{i+1}}{v'_{i+1}},$$

en convenant de supprimer les facteurs ρ quand le point E est dans la travée de rang k.

Rappelons enfin que les distances des foyers de droite de deux travées consécutives aux appuis des dites travées sont liées entre elles par la relation suivante (*) :

$$(3) \quad \frac{1}{v_i l_i}\int_0^{l_i}\frac{(x-u_i)x\,dx}{EI}+\frac{1}{u_{i+1}l_{i+1}}\int_0^{l_{i+1}}\frac{(u_{i+1}-x)(l_{i+1}-x)}{EI}\,dx=0.$$

Si on remplace dans le premier terme u_i par $l_i - v_i$, il vient

$$(3\,bis) \quad \frac{1}{v_i l_i}\int_0^{l_i}\frac{(l_i-x)x\,dx}{EI}+\frac{1}{u_{i+1}l_{i+1}}\int_0^{l_{i+1}}\frac{x(l_{i+1}-x)\,dx}{EI}$$

$$=\frac{1}{l_i}\int_0^{l_i}\frac{x\,dx}{EI}+\frac{1}{l_{i+1}}\int_0^{l_{i+1}}\frac{(l_{i+1}-x)\,dx}{EI}.$$

(En changeant u et v en u' et v', on obtient les relations analogues relatives aux foyers de gauche.)

D'autre part, le foyer de droite de la travée de rive droite et le foyer de gauche de la travée de rive gauche sont connus *a priori;* en effet :

Si la poutre repose librement sur ses appuis extrêmes, les foyers en question coïncident avec ces appuis, en sorte qu'on a : $u_n = l_n$ $v_n = o$; $u'_1 = o$, $v'_1 = l_1$;

Si elle est encastrée à ses extrémités, le foyer de droite de la travée de rive droite coïncide avec le point trisecteur de droite de cette travée, et le foyer de gauche de la travée de rive gauche coïncide avec le point trisecteur de gauche de cette travée, en sorte qu'on a : $u_n = A_{n-1}g_n$, $u'_1 = A_0 g'_1$.

(*) Maurice Lévy, *Statique graphique* : II• partie, p. 303.

Digitized by Google

La détermination des foyers de droite s'effectue au moyen de l'équation (3 *bis*) où l'on fait successivement $i = n-1, n-2$, etc... 1, et où l'on introduit les valeurs de u_n indiquées précédemment.

Même marche pour les foyers de gauche.

Ces déterminations peuvent également être faites très rapidement par des constructions géométriques simples. Nous renvoyons à ce sujet à la *Statique graphique* de M. Maurice Lévy et à notre travail précédent sur les Poutres continues, que nous avons déjà cités.

COMPOSANTES AUX FOYERS. — Décomposons la résultante trisectrice de gauche ψ'_i de la travée de rang i, en deux forces parallèles appliquées, l'une à l'appui de gauche A_{i-1}, l'autre au foyer de gauche F'_i (*fig.* 16, page 85).

Nous appellerons cette seconde force *Composante au foyer de gauche*, et nous la représentons par π'_i.

En effectuant une décomposition similaire relativement à la résultante trisectrice de droite, à l'appui de droite A_i et au foyer de droite F_i, on obtient la *Composante au foyer de droite.*

Si on prend les moments autour du point A_{i-1}, on voit que la composante au foyer de gauche a pour valeur

$$(e') \qquad \pi'_i = \frac{A_{i-1} g'_i \times \psi'_i}{u'_i}.$$

On trouve de même, pour expression de la composante au foyer de droite,

$$(e) \qquad \pi = \frac{g_i A_i \times \psi_i}{v_i}.$$

Pratiquement, au lieu de faire porter les décompositions sur les résultantes ψ'_i et ψ_i, nous opérerons sur les quantités connues Ψ'_i et Ψ_i, qui ne diffèrent de ces résultantes que par le facteur constant $\frac{I_m}{n\Delta x}$ [*formules* (*c'*) et (*c*), pages 85 et 86] ; de sorte qu'en posant

$$(f') \qquad \Pi'_i = \frac{I_m}{n\Delta x}\pi'_i \qquad \text{et} \qquad (f) \qquad \Pi_i = \frac{I_m}{n\Delta x}\pi_i,$$

on aura

$$\Pi'_i = \frac{A_{i-1} g'_i \times \Psi'_i}{u'_i} \quad \text{et} \quad \Pi_i = \frac{g_i A_i \times \Psi_i}{v_i}. \ (*)$$

(*) Il faut remarquer que, Ψ'_i et Ψ_i étant des *longueurs*, les quantités Π'_i et Π_i sont également des *longueurs*.

Digitized by Google

Ce sont ces dernières quantités qu'il importe de connaître pour la suite.

Voici comment on peut les construire : pour fixer les idées, considérons celle Π'_i ; menons (*fig. 16*, page 85) la droite $F'_i a_{i-1}$, et par g'_i conduisons-lui une parallèle qui coupe la verticale $A_{i-1}a_{i-1}$ en un point b_{i-1} ; on a

$$A_{i-1}b_{i-1} = \frac{A_{i-1}g'_i \times A_{i-1}a_{i-1}}{A_{i-1}F'_i} = \frac{A_{i-1}g'_i \times \Psi'_i}{u'_i} = \Pi'_i,$$

quantité cherchée.

Nota. — Dans l'exposé qui va suivre, nous supposerons déterminés les points trisecteurs, les foyers et la composante au foyer de gauche de chaque travée.

§ 51. — Expressions du moment fléchissant et de l'effort tranchant produits en une section quelconque par des charges données. — Centre fixe d'une travée ; centre correspondant à une section.

Soit C le centre de gravité de la section considérée (*fig.* 19). Les forces intérieures ou élastiques, développées dans cette section, considérées comme actions du tronçon A_nC sur le tronçon A_0C, sont réductibles à un couple dont l'axe a pour valeur le moment de flexion M et à une force égale à l'effort tranchant T, en C.

Imaginons qu'on coupe la poutre suivant la section C ; les deux tronçons A_0C, A_nC vont se déformer et leurs extrémités respectives (1) et (2) ne resteront pas en contact. Si maintenant nous appliquons : 1° à l'extrémité (1) du tronçon A_0C, un couple $+M$ et une force $+T$, 2° à l'extrémité (2) du tronçon A_nC, un couple $-M$ et une force $-T$, ces quatre efforts, agissant en tant que forces extérieures sur les deux tronçons, auront pour effet de ramener en coïncidence les extrémités (1) et (2), et par suite de rendre à l'ensemble de la poutre la forme qu'elle affectait avant la coupure.

De là, résulte la méthode suivante pour la détermination de M et de T : on coupera la poutre en C, puis on calculera les déplacements linéaires et angulaires *absolus* des extrémités (1) et (2) des tronçons ainsi formés, sous l'action des forces extérieures données, et on en déduira les déplacements *relatifs* de ces extrémités. Cela

Digitized by Google

fait, on appliquera : 1° à l'extrémité (1), des efforts inconnus $+M$, $+T$; 2° à l'extrémité (2), des efforts $-M$, $-T$, égaux et contraires

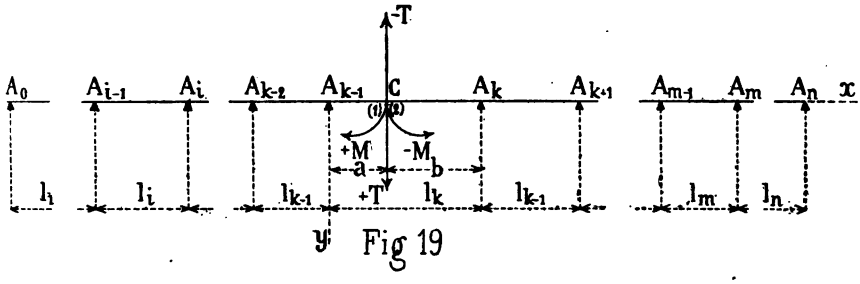


Fig 19

aux premiers. Enfin, on déterminera ces efforts en exprimant que les déplacements linéaire et angulaire *relatifs*, par eux imprimés aux extrémités (1) et (2), sont égaux et contraires à ceux produits par les forces extérieures.

Soient :

g'_1, $(l'_y)_1$, les déplacements angulaire et linéaire absolus imprimés à la section (1) par celles des forces extérieures qui agissent sur le tronçon A_0 (1) supposé séparé du reste de la poutre;

g'_2, $(l'_y)_2$, les déplacements de même nature de la section (2), produits par celles des forces extérieures qui agissent sur le tronçon A_n (2).

Les déplacements, sous l'action des forces extérieures, de l'extrémité (2) *relativement* à l'extrémité (1), ont pour valeurs :

$$g'_2 - g'_1 ; \quad (l'_y)_2 - (l'_y)_1 .$$

Soient, de même :

g''_1, $(l''_y)_1$, les déplacements angulaire et linéaire absolus qu'imprimeraient à l'extrémité (1) les efforts $+M$, $+T$ agissant seuls sur le tronçon A_0(1), supposé détaché du reste de la poutre ;

g''_2, $(l''_y)_2$, les déplacements similaires qu'imprimeraient à l'extrémité (2) du tronçon A_n (2) les efforts $-M$, $-T$, y appliqués.

Les déplacements, sous l'action de $+M$, $+T$, $-M$, $-T$, de l'extrémité (2), *relativement* à celle (1), ont pour valeurs :

$$g'' - g''_1 ; \quad (l''_y)_2 - (l''_y)_1 .$$

Digitized by Google

D'après ce qui a été dit précédemment, on a

$$(a)\qquad \begin{cases} g'_2 - g'_1 + g''_2 - g''_1 = 0, \\ (l'_y)_2 - (l'_y)_1 + (l''_y)_2 - (l''_y)_1 = 0. \end{cases}$$

Calculons, au moyen des formules (I) et (III) du § 32, les déplacements g''_1, g''_2, $(l''_y)_1$, $(l''_y)_2$. Dans l'application de ces formules, nous considérerons comme liaisons indépendantes de l'élasticité celles qui imposent : 1° dans le tronçon A_o (1), la fixité des points A_{k-1}, A_{k-2}, dans le sens vertical ; 2° dans le tronçon A_n (2), la fixité des points A_k, A_{k+1}. Nous avons, en conséquence, en désignant d'une manière générale par M″ les moments fléchissant produits soit dans le tronçon A_o (1) par les efforts + M, + T agissant seuls, soit dans le tronçon A_n (2) par les efforts — M, — T agissant seuls :

$$g''_1 = + \int_C^{C.\bar{A}_{k-2}} \frac{T\,M''}{EI}\,dx, \qquad g''_2 = - \int_C^{C.\bar{A}_{k+1}} \frac{T\,M''}{EI}\,dx,$$

$$(l''_y)_1 = - \int_C^{C.\bar{A}_{k-2}} \frac{MY\,M''}{EI}\,dx, \qquad (l''_y)_2 = + \int_C^{C.\bar{A}_{k+1}} \frac{MY\,M''}{EI}\,dx$$

d'où :

$$g''_2 - g''_1 = - \int_C^{\bar{A}_{k-2}.\bar{A}_{k+1}} \frac{T\,M''}{EI}\,dx,$$

$$(l''_y)_2 - (l''_y)_1 = + \int_C^{\bar{A}_{k-2}.\bar{A}_{k+1}} \frac{MY\,M''}{EI}\,dx.$$

Désignons par μ^M le moment fléchissant que produirait, soit en un point quelconque du tronçon A_o (1), un couple + 1 appliqué à l'extrémité (1) de ce tronçon, soit en un point quelconque du tronçon A_n (2), un couple — 1 appliqué à l'extrémité (2) de ce tronçon, et par μ^T les quantités similaires correspondant, soit à l'application d'un effort vertical + 1 en (1), soit à l'application d'un effort vertical — 1 en (2) ; on a

$$M'' = M\mu^M + T\mu^T;$$

d'où :

$$(b)\qquad \begin{cases} g''_2 - g''_1 = - M \int_C^{\bar{A}_{k-2}.\bar{A}_{k+1}} \frac{T\,\mu^M}{EI}\,dx - T \int_C^{\bar{A}_{k-2}.\bar{A}_{k+1}} \frac{T\,\mu^T}{EI}\,dx, \\ (l''_y)_2 - (l''_y)_1 = + M \int_C^{\bar{A}_{k-2}.\bar{A}_{k+1}} \frac{MY\,\mu^M}{EI}\,dx + T \int_C^{\bar{A}_{k-2}.\bar{A}_{k+1}} \frac{MY\,\mu^T}{EI}\,dx. \end{cases}$$

Digitized by Google

Les diagrammes des moments μ^M et μ^T sont représentés respectivement par les figures 4 et 5 (Pl. 201).

Soient *a* et *b* les distances *essentiellement positives* du point C aux appuis A_{k-1} et A_k.

Dans la partie en porte-à-faux A_{k-1} (1) du tronçon A_o (1), le moment μ^M est constant et égal à $+1$, tandis que le moment μ^T, nul au point (1), croît linéairement jusqu'en A_{k-1}, où il atteint la valeur $+a$.

Dans la partie A_{k-1} A_o, *qui est vide de charges*, les diagrammes des moments μ^M et μ^T sont des lignes polygonales concaves, dont les sommets se trouvent sur les verticales des appuis et dont les côtés coupent les travées en leurs foyers de *gauche* (§ 50. — *Foyers ou Points fixes*).

Dans la partie en porte-à-faux A_k (2) du tronçon A_n (2), le moment μ^M est encore constant et égal à $+1$, tandis que le moment μ^T, nul au point (2), décroît linéairement jusqu'au point d'appui A_k, où sa valeur est $-b$.

Dans la partie A_k A_n, *qui est vide de charges*, les diagrammes des moments μ^M et μ^T sont des lignes polygonales concaves, dont les sommets se trouvent sur les verticales des appuis et dont les côtés coupent les travées en leurs foyers de *droite*.

Cela posé, remarquons que les expressions

$$\int_C^{\overline{A_{k-2}}\overline{A_{k+1}}} \frac{\mu^M}{I}\,dx, \qquad \int_C^{\overline{A_{k-2}}\overline{A_{k+1}}} \frac{\mu^T}{I}\,dx,$$

qui entrent dans les formules (*b*), représentent les résultantes respectives des efforts fictifs verticaux $\frac{\mu^M}{I}dx$, $\frac{\mu^T}{I}dx$, appliqués entr A_{k-2} et A_{k+1}, et des réactions fictives correspondantes en A_{k-2} A_{k+1} ; tandis que les expressions

$$\int_C^{\overline{A_{k-2}}\overline{A_{k+1}}} M\,\frac{\mu^M}{I}dx, \qquad \int_C^{\overline{A_{k-2}}\overline{A_{k+1}}} M\,\frac{\mu^T}{I}dx,$$

représentent les sommes des moments de ces mêmes efforts rapport au point C, ou, ce qui revient au même, les moments leurs résultantes.

Soient :

φ_k, φ'_k, les valeurs respectives des résultantes en question ;

Digitized by Google

O_k, O'_k, les points d'intersection de leurs lignes d'action avec la droite A_0A_n, points que nous appellerons : le premier, *centre fixe de la travée*; le second, *centre correspondant au point* C;

c_k, c'_k, les abscisses de ces centres relativement au point C pris pour origine, abscisses mesurées positivement de C vers A_n, négativement de C vers A_0.

On a

$$\int_C^{\bar{A}_{k-2}\bar{A}_{k+1}} \frac{T\,\mu^M}{I}\,dx = \varphi_k, \qquad \int_C^{\bar{A}_{k-2}\bar{A}_{k+1}} \frac{T\,\mu^T}{I}\,dx = \varphi'_k,$$

$$\int_C^{\bar{A}_{k-2}\bar{A}_{k+1}} \frac{MY\,\mu^M}{I}\,dx = c_k\varphi_k, \qquad \int_C^{\bar{A}_{k-2}\bar{A}_{k+1}} \frac{MY\,\mu^T}{I}\,dx = c'_k\varphi'_k;$$

et les formules (*b*) deviennent dès lors

$$(b') \qquad \begin{cases} g''_2 - g''_1 = (-\varphi_k M - \varphi'_k T)\,\dfrac{1}{E}, \\ (l''_y)_2 - (l''_y)_1 = (+c_k\varphi_k M + c'_k\varphi'_k T)\,\dfrac{1}{E}. \end{cases}$$

Ces expressions substituées dans les équations (*a*) donnent

$$\varphi_k M + \varphi'_k T = E(g'_2 - g'_1),$$
$$c_k\varphi_k M + c'_k\varphi'_k T = -E\left((l'_y)_2 - (l'_y)_1\right);$$

D'où l'on tire

$$(4) \qquad \begin{cases} M = \dfrac{c'_k E\,(g'_2 - g'_1) + E\left((l'_y)_2 - (l'_y)_1\right)}{(c'_k - c_k)\,\varphi_k}, \\ T = \dfrac{-E\left((l'_y)_2 - (l'_y)_1\right) - E\,c_k(g'_2 - g'_1)}{(c'_k - c_k)\,\varphi'_k}. \end{cases}$$

Ces formules font connaître M et T en fonction des déplacements linéaires et angulaires que les forces extérieures imprimeraient aux sections extrêmes (1) et (2) des tronçons A_0 (1) et A_n (2) de la poutre supposée coupée en C.

Avant de les appliquer au cas d'une charge mobile, nous allons étudier les propriétés des centres et calculer les valeurs des produits $(c'_k - c_k)\,\varphi_k$ et $(c'_k - c_k)\varphi'_k$.

Digitized by Google

§ 52 — Propriétés et détermination des Centres.

LEMME. — *η représentant les ordonnées du diagramme formé : 1° dans une travée de rang k, arbitrairement choisie* (fig. 6, pl. 201), *par une divergente quelconque $A_{k-1}B_k$ issue de l'appui de gauche A_{k-1} et limitée à son point d'intersection avec la verticale de l'appui de droite A_k ; 2° dans la travée de rang $k+1$, par une droite joignant ce point d'intersection au foyer de droite F_{k+1} de cette travée, et prolongée jusqu'à la verticale de l'appui de droite de la dite travée :*

Si on applique, tout le long de ces deux travées, des efforts fictifs verticaux $\frac{\eta}{I}dx$, la résultante de ces efforts et de la réaction fictive qu'ils développent sur l'appui A_{k+1} de la travée de rang $k+1$ supposée indépendante de celle de rang k, passe par le foyer de droite de la travée de rang k.

Le foyer de gauche de la travée de rang k jouit de la même propriété relativement à la résultante des efforts fictifs correspondant à un diagramme analogue au précédent, et formé, dans la travée de rang k, d'une divergente issue de l'appui de droite A_k, et dans la travée de rang $k-1$ d'une droite passant par le foyer de gauche F'_{k-1} de ladite travée.

Nous ne diminuerons en rien la généralité de la démonstration en dirigeant la divergente $A_{k-1}B_k$, de manière que $A_kB_k = +1$.

En un élément dx, d'abscisse x, de la travée l_k, la force fictive $\frac{\eta}{I}dx$ a pour valeur

$$\frac{1}{l_k}\frac{xdx}{I}.$$

En un élément analogue de la travée l_{k+1}, elle est égale à

$$\frac{1}{u_{k+1}} \times \frac{u_{k+1} - x}{I}\,dx.$$

La réaction fictive en A_{k+1} s'obtient en prenant les moments, par rapport à A_k, des forces fictives agissant dans la travée l_{k+1}; elle a pour expression

$$-\frac{1}{l_{k+1}}\int_0^{l_{k+1}} \frac{1}{u_{k+1}}\frac{(u_{k+1} - x)xdx}{I}.$$

Digitized by Google

Enfin, la résultante ε_k des forces fictives réparties entre A_{k-1} et A_{k+1}, ainsi que de la réaction fictive en ce dernier point, a pour valeur

$$\varepsilon_k = \frac{1}{l_k}\int_o^{l_k} \frac{x}{I}\,dx + \int_o^{l_{k+1}} \frac{1}{u_{k+1}}\,\frac{u_{k+1}-x}{I}\,dx - \frac{1}{l_{k+1}}\int_o^{l_{k+1}} \frac{1}{u_{k+1}}\,\frac{(u_{k+1}-x)x\,dx}{I}$$

$$= \frac{1}{l_k}\int_o^{l_k} \frac{x}{I}\,dx + \frac{1}{u_{k+1}l_{k+1}}\int_o^{l_{k+1}} \frac{(u_{k+1}-x)(l_{k+1}-x)}{I}\,dx.$$

Cherchons l'abscisse ξ du point d'application de cette résultante relativement au point d'appui A_k considéré comme origine; à cet effet, prenons les moments par rapport à ce dernier point. On a, en remarquant que la somme des moments des forces fictives réparties sur la travée l_{k+1} et de la réaction fictive en A_{k+1} est nulle,

$$(d) \qquad \xi\,\varepsilon_k = -\frac{1}{l_k}\int_o^{l_k} \frac{x(l_k-x)}{I}\,dx,$$

ou, en remplaçant ε_k par sa valeur,

$$\xi\left[\frac{1}{l_k}\int_o^{l_k} \frac{x}{I}\,dx + \frac{1}{u_{k+1}l_{k+1}}\int_o^{l_{k+1}} \frac{(u_{k+1}-x)(l_{k+1}-x)}{I}\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{l_k}\int_o^{l_k} \frac{x(l_k-x)}{I}\,dx.$$

En groupant les intégrales qui ont mêmes limites, on peut mettre cette équation sous la forme suivante :

$$-\frac{1}{\xi l_k}\int_o^{l_k} \frac{x[x-(l_k+\xi)]}{I}\,dx + \frac{1}{u_{k+1}l_{k+1}}\int_o^{l_{k+1}} \frac{(u_{k+1}-x)(l_{k+1}-x)}{I}\,dx = 0.$$

La racine de cette équation en ξ est $-v_k$; effectivement, si on y fait $\xi = -v_k$, il vient, en observant que $l_k - v_k = u_k$,

$$\frac{1}{v_k l_k}\int \frac{x(x-u_k)\,dx}{I} + \frac{1}{u_{k+1}l_{k+1}}\int_o^{l_{k+1}} \frac{(u_{k+1}-x)(l_{k+1}-x)}{I}\,dx = 0.$$

Digitized by Google

qui n'est autre que la relation connue (3) du § 50, où l'on aurait remplacé i par k et supprimé le facteur constant $\frac{1}{E}$.

On a donc bien

$$\xi = -v_k, \tag{e}$$

ce qui justifie le lemme énoncé.

THÉORÈME I. — *Le centre fixe O_k de la travée divise dans le même rapport la longueur de la travée et la distance focale F'_kF_k.*

Le point O_k est, par définition, le centre des forces fictives verticales $\frac{\mu^M}{I}dx$, réparties dans les trois travées l_{k-1}, l_k, l_{k+1}, et des réactions fictives correspondantes en A_{k-2} et en A_{k+1}.

Le diagramme des quantités μ^M est représenté à la planche 201 (*fig. 4*).

Une ordonnée quelconque de ce diagramme est égale à la somme des ordonnées correspondantes des deux diagrammes $A_{k-1}B_kB_{k+1}$ et $A_kB_{k-1}B_{k-2}$, (*fig. 4* ou *fig. 6*, pl. 201), définis au lemme précédent.

On peut donc, pour la détermination du point O_k, remplacer les forces fictives $\frac{\mu^M}{I}dx$, par celles correspondant à ces deux derniers diagrammes.

Or, la résultante des forces fictives répondant au diagramme $A_{k-1}B_kB_{k+1}$ est, d'après le lemme, appliquée au foyer de droite F_k et elle a pour valeur, en vertu des relations *(d)* et *(e)*,

$$\varepsilon_k = \frac{1}{v_k l_k}\int_0^{l_k} \frac{x(l_k - x)}{I}\,dx. \tag{f}$$

De même, celle des forces fictives répondant au diagramme $A_kB_{k-1}B_{k-2}$ est appliquée au foyer de gauche F'_k et elle a pour valeur

$$\varepsilon'_k = \frac{1}{v'_k l_k}\int_0^{l_k} \frac{(l_k - x)x}{I}\,dx. \tag{g}$$

O_k est donc le point d'application de la résultante φ_k de ε_k et de ε'_k; en sorte qu'on a, en regardant comme positives les longueurs

Digitized by Google

mesurées à partir de O_k dans le sens O_kA_n et comme négatives celles mesurées dans le sens O_kA_o,

$$(h) \qquad \frac{O_kF_k}{O_kF'_k} = -\frac{\varepsilon'_k}{\varepsilon_k},$$

ou, à cause de (*f*) et de (*g*),

$$(k) \qquad \frac{O_kF_k}{O_kF'_k} = -\frac{v_k}{u'_k} = -\frac{F_kA_k}{A_{k-1}F'_k} = +\frac{F_kA_k}{F'_kA_{k-1}}.$$

ou enfin,

$$(k') \qquad \frac{O_kF_k}{O_kF'_k} = \frac{O_kF_k + F_kA_k}{O_kF'_k + F'_kA_{k-1}} = \frac{O_kA_k}{O_kA_{k-1}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Construction du centre de la travée. — La relation (*k*) conduit immédiatement à la construction suivante (*fig. 6*, pl. 201) :

Porter, en ordonnées, $F_kH_k = v_k$, $F'_kH'_k = u'_k$, en sens inverse l'une de l'autre ; tirer $H_kH'_k$. Le point d'intersection de cette ligne avec $A_{k-1}A_k$ est le centre cherché.

Remarque. — La position du centre de la travée est indépendante de celle de la section C dont on cherche le moment fléchissant et l'effort tranchant ; d'où la dénomination de *centre fixe.*

Théorème II. — *Le rapport anharmonique de la division de quatre points formée par les deux foyers* F'_k, F_k, *par le centre fixe* O_k *de la travée* l_k *et par le centre* O'_k *correspondant à un point* C *arbitrairement choisi dans cette travée, est égal au rapport des deux segments en lesquels ce point partage la travée.*

Le centre O'_k correspondant au point C est, par définition, le centre des forces fictives verticales $\frac{\mu^T}{I}\,dx$, réparties dans les trois travées consécutives l_{k-1}, l_k, l_{k+1}, et des réactions fictives en A_{k-1} et en A_{k+1}.

Le diagramme des μ^T est représenté à la planche 201 (*fig. 5*).

Une ordonnée quelconque de ce diagramme est égale à la somme algébrique des ordonnées correspondantes des deux diagrammes $A_{k-1}B'_kB'_{k+1}$ et $A_kB'_{k-1}B'_{k-2}$.

D'autre part, une ordonnée quelconque du diagramme $A_{k-1}B'_kB'_{k+1}$ est égale à l'ordonnée correspondante du diagramme $A_{k-1}B_kB_{k+1}$ (*fig. 6*, pl. 201), amplifiée dans le rapport de $-b$ à $+1$, puisque $A_kB'_k = -b$ et que $A_kB_k = +1$.

Digitized by Google

De même, une ordonnée quelconque du diagramme $A_k B'_{k-1} B'_{k-2}$ *(fig. 5)* est égale à l'ordonnée correspondante du diagramme $A_k B_{k-1} B_{k-2}$ *(fig. 6)*, amplifiée dans le rapport de $+ a$ à $+ 1$, puisque $A_{k-1} B'_{k-1} = + a$ et que $A_{k-1} B_{k-1} = + 1$.

On peut dès lors, pour la détermination du centre O'_k, remplacer les forces fictives $\frac{\mu^T}{I} dx$, correspondant au diagramme $B'_{k-2} B'_{k-1} B'_k B'_{k+1}$ *(fig. 5)*, par celles répondant aux deux diagrammes $A_{k-1} B_k B_{k+1}$ et $A_k B_{k-1} B_{k-2}$ *(fig .6)*, multipliées respectivement par $- b$ et par $+ a$.

Ces dernières et les réactions fictives correspondantes en A_{k+1} d'une part, et en A_{k-2} d'autre part, peuvent elles-mêmes être remplacées par leurs résultantes, lesquelles, en vertu du lemme, sont appliquées en F_k et en F'_k, et ont pour valeurs

$$- b\varepsilon_k \qquad \text{et} \qquad + a\varepsilon'_k,$$

puisque ε_k et ε'_k sont les résultantes des forces fictives correspondant aux diagrammes $A_{k-1} B_k B_{k+1}$ et $A_k B_{k-1} B_{k-2}$, non amplifiés.

O'_k *(fig. 7)* est donc le point d'application de la résultante φ'_k des forces $- b\varepsilon_k$ et $+ a\varepsilon'_k$; on a par conséquent

$$\frac{O'_k F_k}{O'_k F'_k} = \frac{a\varepsilon'_k}{b\varepsilon_k},$$

ou, à cause de (h),

$$(l) \qquad \frac{O'_k F_k}{O'_k F'_k} = - \frac{a}{b} \times \frac{O_k F_k}{O_k F'_k} = \frac{CA_{k-1}}{CA_k} \times \frac{O_k F_k}{O_k F'_k},$$

en ayant égard à la convention relatives aux signes.

Cette dernière relation donne

$$(l') \qquad \frac{O'_k F_k}{O'_k F'_k} \times \frac{O_k F'_k}{O_k F_k} = \frac{CA_{k-1}}{CA_k};$$

ce qui justifie le théorème.

Remarque — L'énoncé qui précède peut être transformé en le suivant :

Le rapport anharmonique de la division de quatre points formée par les deux appuis de la travée, par le centre fixe O_k, *et par le centre* O'_k *correspondant à un point* C *arbitrairement choisi dans cette travée,*

Digitized by Google

est égal au rapport des distances du point C *aux deux foyers* F'_k, F_k; — *c'est-à-dire que*

$$\frac{O'_kA_k}{O'_kA_{k-1}} \times \frac{O_kA_{k-1}}{O_kA_k} = \frac{CF'_k}{CF_k}.$$

En effet, la relation (l') peut s'écrire

$$\frac{O'_kF_k}{O'_kF'_k} \times \frac{CA_k}{CA_{k-1}} = \frac{O_kF_k}{O_kF'_k},$$

ou, en transformant le premier membre, d'après la figure 7 (planche 201),

$$\frac{(O'_kA_k - F_kA_k)(CF_k + F_kA_k)}{(O'_kA_{k-1} - F'_kA_{k-1})(CF'_k + F'_kA_{k-1})}$$
$$= \frac{O'_kA_k \times CF_k + F_kA_k(O'_kA_k - F_kA_k - CF_k)}{O'_kA_{k-1} \times CF'_k + F'_kA_{k-1}(O'_kA_{k-1} - F'_kA_{k-1} - CF'_k)} = \frac{O_kF_k}{O_kF'_k},$$

ou encore

$$(m) \qquad \frac{O'_kA_k \times CF_k + F_kA_k \times O'_kC}{O'_kA_{k-1} \times CF'_k + F'_kA_{k-1} \times O'_kC} = \frac{O_kF_k}{O_kF'_k}.$$

D'autre part, on a, en vertu du théorème I,

$$\frac{F_kA_k}{F'_kA_{k-1}} = \frac{O_kF_k}{O_kF'_k},$$

ou

$$(n) \qquad \frac{F_kA_k \times O'_kC}{F'_kA_{k-1} \times O'_kC} = \frac{O_kF_k}{O_kF'_k}.$$

Les deux premières fractions des relations (m) et (n) sont donc égales entre elles; en les retranchant terme à terme, il vient :

$$\frac{O'_kA_k \times CF_k}{O'_kA_{k-1} \times CF'_k} = \frac{O_kF_k}{O_kF'_k},$$

ou

$$(p) \qquad \frac{O'_kA_k}{O'_kA_{k-1}} \times \frac{O_kF'_k}{O_kF_k} = \frac{CF'_k}{CF_k},$$

ou enfin, puisque *(théorème I)*

$$\frac{O_kF'_k}{O_kF} = \frac{O_kA_{k-1}}{O_kA_k},$$

$$(p') \qquad \frac{O'_kA_k}{O'_kA_{k-1}} \times \frac{O_kA_{k-1}}{O_kA_k} = \frac{CF'_k}{CF_k},$$

qui est la relation que nous nous proposions d'établir.

Digitized by Google

DÉTERMINATION DU CENTRE O'_k CORRESPONDANT A UN POINT C.

De l'équation (l) on tire, en y faisant

$$O'_kF_k = O'_kF'_k + F'_kF_k :$$

$$F'_kO'_k = \frac{F'_kF_k}{1 - \frac{CA_{k-1}}{CA_k} \times \frac{O_kF_k}{O_kF'_k}}.$$

Cette formule fait connaître la position du centre cherché en fonction de certaines constantes de la travée, qui sont la distance focale F'_kF_k et le rapport $\frac{O_kF_k}{O_kF'_k} = -\frac{v_k}{u'_k}$ (*), et en fonction du rapport $\frac{CA_{k-1}}{CA_k}$ qui définit la position du point C.

Discussion. — Supposons que le point C se trouve d'abord en A_{k-1} et qu'il se déplace vers A_k.

1° Quand C est en A_{k-1}, on a $CA_{k-1} = 0$ et par suite $F'_kO'_k = F'_kF_k$; le centre O'_k coïncide donc avec le foyer de droite F_k.

Lorsque C avance vers F'_k, le rapport $\frac{CA_{k-1}}{CA_k}$ augmente en valeur absolue; $F'_kO'_k$ augmente, et par suite le centre O'_k se rapproche de A_k.

2° Lorsque C passe au foyer de gauche F'_k, on a

$$\frac{CA_{k-1}}{CA_k} = \frac{F'_kA_{k-1}}{F'_kA_k};$$

d'ailleurs la relation (k) donne

$$\frac{O_kF_k}{O_kF'_k} = \frac{F_kA_k}{F'_kA_{k-1}}.$$

Substituant dans l'expression de $F'_kO'_k$, il vient

$$F'O'_k = \frac{F'_kF_k}{1 - \frac{F_kA_k}{F'_kA_k}} = \frac{F'_kF_k \times F'_kA_k}{F'_kA_k - F_kA_k} = F'_kA_k.$$

Le centre coïncide donc avec l'appui de gauche A_k.

(*) En vertu de la relation (k).

Digitized by Google

3° Lorsque C, quittant le foyer de gauche F'_k, se rapproche de O_k, le centre O'_k s'éloigne de A_k vers A_n, et, quand C coïncide avec O_k, on a

$$CA_{k-1} = O_kA_{k-1}, \quad CA_k = O_kA_k.$$

d'autre part (k') donne

$$\frac{O_kF_k}{O_kF'_k} = \frac{O_kA_k}{O_kA_{k-1}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de $F_kO'_k$, il vient

$$F'_kO'_k = +\infty.$$

En résumé, tandis que le point C se déplace de l'appui de gauche au foyer de gauche, le centre correspondant O'_k se déplace du foyer de droite à l'appui de droite, et pendant que C passe du foyer de gauche au centre fixe O_k de la travée, le centre O'_k s'éloigne à l'infini dans la direction de A_n.

En continuant la discussion, on reconnaît qu'au moment où le point C franchit le centre O_k de la travée, le centre O'_k passe brusquement à l'infini dans la direction de A_0; puis, tandis que C marche vers le foyer de droite, le centre O'_k se rapproche de l'appui de gauche qu'il atteint, lorsque C arrive au foyer de droite; enfin C, continuant à cheminer vers l'appui de droite, O'_k s'avance vers le foyer de gauche, où il parvient en même temps que C atteint l'appui de droite.

§ 53. — Détermination des valeurs des produits $(c'_k - c_k)\varphi_k$ et $(c'_k - c_k)\varphi'_k$.

VALEUR DU PRODUIT $(c'_k - c_k)\varphi_k$. — Nous avons vu précédemment (§ 52) que φ_k était la résultante des forces fictives paralleles ε_k et ε'_k, appliquées respectivement au foyer de droite et au foyer de gauche de la travée (*fig. 6*, pl. 201); donc

$$(a) \qquad \varphi_k = \varepsilon_k + \varepsilon'_k.$$

D'autre part, ε_k et ε'_k sont données par les formules (f) et (g) du § 52, savoir:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{v_k l_k} \int_0^{l_k} \frac{x(l_k - x)}{I}\, dx, \qquad \varepsilon'_k = \frac{1}{u'_k l_k} \int_0^{l_k} \frac{x(l_k - x)}{I}\, dx$$

Digitized by Google

qui, en vertu des relations (a') et (b') du § 50, p. 84, deviennent :

$$(b) \qquad \varepsilon_k = \frac{A_{k-1}g'_k \times \psi'_k}{v_k l_k}; \qquad \varepsilon'_k = \frac{A_{k-1}g'_k \times \psi'_k}{u'_k l_k}.$$

En substituant ces valeurs de ε_k et de ε'_k dans l'expression de φ_k, il vient

$$(c) \qquad \varphi_k = \frac{(u'_k + v_k)A_{k-1}g'_k \times \psi'_k}{v_k u'_k l_k}.$$

Mais le théorème I du § 52 donne

$$\frac{u'_k}{A_{k-1}O_k} = \frac{v_k}{O_k A_k} = \frac{u'_k + v_k}{A_{k-1}O_k + O_k A_k} = \frac{u'_k + v_k}{l_k};$$

d'où l'on tire

$$(d) \qquad \frac{u'_k + v_k}{v_k l_k} = \frac{1}{O_k A_k}.$$

Substituant dans l'expression (c) de φ_k, il vient

$$(e) \qquad \varphi_k = \frac{1}{O_k A_k} \times \frac{A_{k-1}g'_k \times \psi'_k}{u'_k}.$$

Or la seconde fraction de cette formule représente précisément la valeur de la *composante au foyer de gauche* de la travée de rang k considérée [§ 50, p. 89, équation (e')]; donc

$$(f) \qquad \varphi_k = \frac{1}{O_k A_k} \times \pi'_k \ (*).$$

Enfin, remarquons que la longueur $O_k O'_k$ est égale, en grandeur et en signe, à $(c'_k - c_k)$, à la condition, bien entendu, de compter positivement cette longueur lorsque O'_k est à droite de O_k, et négativement dans le cas contraire; on a donc

$$(5) \qquad (c'_k - c_k)\varphi_k = \frac{O_k O'_k}{O_k A_k} \times \pi'_k.$$

VALEUR DU PRODUIT $(c'_k - c_k)\varphi'_k$. — *Le moment de la résultante fictive φ'_k par rapport au centre fixe O_k de la travée (c'est-à-dire le pro-*

(*) On remarquera que la valeur de φ_k est indépendante de la position du point C dans la travée.

Digitized by Google

duit $(c'_k - c_k)\varphi'_k$) *est indépendant de la position du point* C. — En effet, nous avons vu (§ 52) que φ'_k est la résultante des forces fictives $-b\varepsilon_k$ et $+a\varepsilon'_k$ appliquées respectivement en F_k et en F'_k (*fig.* 7, pl. 201); sa valeur est donc

$$(g) \qquad \varphi'_k = -b\varepsilon_k + a\varepsilon'_k.$$

Son point d'application est O'_k.

En prenant les moments par rapport à O_k, il vient, en regardant les bras de leviers comme positifs dans le sens O_kA_n et comme négatifs dans le sens O_kA_o :

$$(h) \qquad O_kO'_k \times \varphi'_k = +a\varepsilon'_k \times O_kF'_k - b\varepsilon_k \times O_kF_k .$$

Mais O_k et un point de la résultante des forces fictives $+\varepsilon_k$ et $+\varepsilon'_k$ appliquées respectivement en F_k et en F'_k ; par conséquent

$$(i) \qquad \varepsilon_k \times O_kF_k + \varepsilon'_k \times O_kF'_k = 0.$$

Tirant de cette équation la valeur de $\varepsilon_k \times O_kF_k$ et substituant dans la relation *(h)*, il vient

$$O_kO'_k \times \varphi'_k = (a+b)\varepsilon'_k \times O_kF'_k = l_k \times \varepsilon'_k \times O_kF'_k.$$

Si on remplace ε'_k par sa valeur en fonction de ψ'_k, donnée par la seconde formule (*b*), on a

$$O_kO'_k \times \varphi'_k = O_kF'_k \times \frac{A_{k-1}g'_k \times \psi'_k}{u'_k} ;$$

ou, en remarquant, comme plus haut, que

$$O_kO'_k = c'_k - c_k \quad \text{et que} \quad \frac{A_{k-1}g'_k \times \psi'_k}{u'_k} = \pi'_k :$$

$$(6) \qquad (c'_k - c_k)\varphi'_k = O_kF'_k \times \pi'_k ,$$

quantité constante, ainsi que nous l'avions annoncé.

§ 54. — Expressions du moment fléchissant et de l'effort tranchant produits en une section quelconque par le passage d'une charge mobile. — Les efforts fictifs $\frac{z_1}{I}dx$, $\frac{z_2}{I}dx$. — Théorème fondamental relatif aux lignes d'influence.

Revenons aux formules finales (4) du (§ 51) et calculons les termes inconnus des seconds membres, c'est-à-dire les déplace-

Digitized by Google

ments angulaires et linéaires que les forces extérieures, qui se réduisent ici à la charge mobile, imprimeraient aux sections (1) et (2) des deux tronçons $A_0(1)$, $A_n(2)$ de la poutre supposée coupée en C (*fig. 19*, p. 91).

Il y a lieu de distinguer suivant que la charge mobile se trouve sur le tronçon $(2)A_n$ ou, au contraire, sur le tronçon $A_0(1)$.

1° La charge mobile se trouve sur le tronçon $(2)A_n$.

Soit, à un instant donné, D le point d'application de la charge mobile P sur le tronçon $(2)A_n$ considéré.

Le tronçon $A_0(1)$ ne supportant aucune charge n'est pas déformé, et l'on a

$$(a) \qquad g'_1 = 0 \qquad (l'_y)_1 = 0 .$$

Il reste à calculer g'_2 et $(l'_y)_2$, déplacements angulaire et linéaire produits en (2) par le poids P appliqué en D, et que nous représenterons maintenant par g_2^D, $(l_y)_2^D$, pour rentrer dans un système de notation déjà employé (*1re Partie*).

En vertu du second théorème de réciprocité (§ 7), le déplacement angulaire g_2^D imprimé à la section (2) par la charge P appliquée en D, est égal au déplacement vertical $(l'_y)_D^2$ qu'imprimerait au point D, un couple + P agissant sur l'extrémité (2) du tronçon $(2)A_n$; en sorte que

$$(b) \qquad g'_2 = g_2^D = (l'_y)_D^2 .$$

De même, en vertu du premier théorème de réciprocité (§ 6), le déplacement vertical $(l_y)_2^D$ produit en (2) par la charge P appliquée en D, est égal au déplacement vertical $(l''_y)_D^2$ qu'imprimerait au point D une force verticale + P appliquée à l'extrémité (2) du tronçon $(2)A_n$; en sorte que

$$(c) \qquad (l'_y)_2 = (l_y)_2^D = (l''_y)_D^2 .$$

Nous sommes maintenant ramenés à calculer les déplacements verticaux $(l'_y)_D^2$ et $(l''_y)_D^2$; nous nous servirons à cet effet des formules du § 32. Il faut, au préalable, déterminer les moments fléchissants produits par le couple + P et par la force + P.

Le couple + P, appliqué à la section (2), développe dans le tronçon (2) A_n des moments fléchissants que nous désignerons d'une manière générale par z'.

Digitized by Google

Dans la partie à porte-à-faux (2)A_k, (*fig. 8*, pl. 201) le moment est constant et a pour valeur

(*d*) $$z' = -P ;$$

puis, à partir du point A_k, les travées n'étant pas chargées, les moments varient suivant les ordonnées de lignes droites qui passent par les foyers de droite (§ 50), et l'on a en vertu de la formule (1) (§ 50) :

En un point quelconque de la travée A_kA_{k+1} :

(*e*) $$z' = -P \times \frac{u_{k+1} - x}{u_{k+1}} ;$$

En un point quelconque de la travée $A_{m-1}A_m$:

(*f*) $$z' = -P \times \rho_{k+1} \times \rho_{k+2} \times \ldots\ldots \rho_{m-1} \times \frac{u_m - x}{u_m} ;$$

x étant l'abscisse du point considéré, mesurée à partir de l'appui de gauche de la travée où se trouve ce point.

D'autre part, la force verticale + P, appliquée en (2), produit dans le tronçon (2)A_n des moments fléchissants que nous représenterons d'une manière générale par z''. Dans la partie en porte-à-faux (2)A_k (*fig. 9*, pl. 201), le moment, nul au point (2), croît linéairement jusqu'en A_k où il atteint la valeur + Pb; puis, dans les travées A_kA_{k+1} etc... non chargées, il varie encore linéairement en s'annulant en chaque foyer de droite. On a donc :

En un point quelconque de la partie en porte-à-faux (2)A_k :

(*g*) $$z'' = +P\xi,$$

ξ étant l'abscisse du point considéré, mesurée à partir du point (2) pris pour origine.

En un point quelconque de la travée A_kA_{k+1} :

(*h*) $$z'' = +Pb \times \frac{u_{k+1} - x}{u_{k+1}} ;$$

En un point quelconque de la travée $A_{m-1}A_m$:

(*i*) $$z'' = +Pb \times \rho_{k+1} \times \rho_{k+2} \times \ldots\ldots \rho_{m-1} \times \frac{u_m - x}{u_m} ;$$

x ayant la même signification que plus haut.

Les moments z' et z'' étant connus, nous pouvons maintenant calculer les déplacements $(l'_y)^2_D$, $(l''_y)^2_D$ par la formule (I) du § 32. Il faut se rappeler que dans l'application de cette formule,

Digitized by Google

nous devons ramener la pièce à n'être soumise qu'à des liaisons indépendantes de l'élasticité et que nous sommes maitres du choix de ces dernières parmi toutes les liaisons existantes.

Si le point D, dont nous cherchons les déplacements, est situé dans la partie de poutre (2)A_k, nous considérerons comme liaisons indépendantes de l'élasticité celles qui imposent la fixité des points A_k et A_{k+1}, et nous écrirons en conséquence :

$$(l'_y)^2_D = \overset{D.\overline{A}_{k+1}}{\underset{D}{MY}} \frac{z'}{EI}\,dx, \quad (l''_y)^2_D = \overset{D.\overline{A}_{k+1}}{\underset{D}{MY}} \frac{z''}{EI}\,dx,$$

formules qu'en vue des calculs subséquents, nous mettrons sous la forme suivante :

$$(m) \quad (l'_y)^2_D = \overset{D.A_k}{\underset{D}{MY}} \frac{z'}{EI}\,dx + \overset{A_k.\overline{A}_{k+1}}{\underset{D}{MY}} \frac{z'}{EI}\,dx; \quad (l''_y)^2_D = \overset{D.A_k}{\underset{D}{MY}} \frac{z''}{EI}\,dx + \overset{A_k.\overline{A}_{k+1}}{\underset{D}{MY}} \frac{z''}{EI}\,dx.$$

Si le point D est situé dans une travée quelconque, placée à droite du point d'appui A_k, celle $A_{m-1}A_m$ par exemple, nous considérerons comme liaisons indépendantes de l'élasticité celles qui imposent la fixité des points A_{m-1} et A_m ; nous aurons par suite

$$(n) \qquad (l'_y)^2_D = \overset{D.\overline{A}_m}{\underset{D}{MY}} \frac{z'}{EI}\,dx; \quad (l''_y)^2_D = \overset{D.\overline{A}_m}{\underset{D}{MY}} \frac{z''}{EI}\,dx.$$

En adjoignant à chacun des deux groupes d'équations *(m)* et *(n)* celles (*a*) (*b*) et (*c*) qui précèdent, on obtient, par substitution dans les formules (4) du § 51, et en tenant compte des relations (5) et (6) du § 53 :

Lorsque le point D *est dans la partie de poutre* (2) A_k :

$$\frac{M}{O_kA_k} = \frac{c'_k \overset{D.A_k}{\underset{D}{MY}} \frac{z'}{I}\,dx + c'_k \overset{A_k.\overline{A}_{k+1}}{\underset{D}{MY}} \frac{z'}{I}\,dx + \overset{D.A_k}{\underset{D}{MY}} \frac{z''}{I}\,dx + \overset{A_k.\overline{A}_{k+1}}{\underset{D}{MY}} \frac{z''}{I}\,dx}{O_kO'_k \times \pi'_k}$$

$$= \frac{\overset{D.A_k}{\underset{D}{MY}} \frac{c'_k z' + z''}{I}\,dx + \overset{A_k.\overline{A}_{k+1}}{\underset{D}{MY}} \frac{c'_k z' + z''}{I}\,dx}{O_kO'_k \times \pi'_k};$$

$$T = -\frac{\overset{D.A_k}{\underset{D}{MY}} \frac{z''}{I}\,dx + \overset{A_k.\overline{A}_{k+1}}{\underset{D}{MY}} \frac{z''}{I}\,dx + c_k \overset{D.A_k}{\underset{D}{MY}} \frac{z'}{I}\,dx + c_k \overset{A_k.\overline{A}_{k+1}}{\underset{D}{MY}} \frac{z'}{I}\,dx}{O_kF'_k \times \pi'_k}$$

$$= -\frac{\overset{D.A_k}{\underset{D}{MY}} \frac{z' + c_k z'}{I}\,dx + \overset{A_k.\overline{A}_{k+1}}{\underset{D}{MY}} \frac{z'' + c_k z'}{I}\,dx}{O_kF'_k \times \pi'_k};$$

Digitized by Google

Lorsque le point D *est dans une travée quelconque située à droite du point* A_k, *celle* $A_{m-1}A_m$ *par exemple :*

$$\frac{M}{O_kA_k}=\frac{c'_k\overset{D.\overline{A}_m}{\underset{D}{M}}\frac{z'}{I}dx+\overset{D.\overline{A}_m}{\underset{D}{M}}\frac{z''}{I}dx}{O_kO'_k\times\pi'_k}=\frac{\overset{D.\overline{A}_m}{\underset{D}{M}}\frac{c'_kz'+z''}{I}dx}{O_kO'_k\times\pi'_k},$$

$$T=-\frac{\overset{D.\overline{A}_m}{\underset{D}{M}}\frac{z''}{I}dx+c_k\overset{D.\overline{A}_m}{\underset{D}{M}}\frac{z'}{I}dx}{O_kF'_k\times\pi'_k}=-\frac{\overset{D.\overline{A}_m}{\underset{D}{M}}\frac{z''+c_kz'}{I}dx}{O_kF'_k\times\pi'_k}.$$

Or, les valeurs de z' et de z'' dans les intervalles (2) A_k, A_kA_{k+1}, $A_{m-1}A_m$ sont données par les formules (*d*) (*e*) (*f*) (*g*) (*h*) (*l*).

En substituant ces valeurs dans les expressions précédentes de M et de T, il vient :

Lorsque le point D *est dans la partie de poutre* (2) A_k :

$$(7)\quad\begin{cases}\dfrac{M}{O_kA_k}=P\dfrac{\overset{D.A_k}{\underset{D}{M}}\frac{\xi-c'_k}{I}dx+\overset{A_k.\overline{A}_{k+1}}{\underset{D}{M}}\frac{(b-c'_k)(u_{k+1}-x)}{u_{k+1}\times I}dx}{O_kO'_k\times\pi'_k},\\[2ex] T=P\dfrac{\overset{D.A_k}{\underset{D}{M}}\frac{-(\xi-c_k)}{I}dx+\overset{A_k\overline{A}_{k+1}}{\underset{D}{M}}\frac{-(b-c_k)(u_{k+1}-x)}{u_{k+1}\times I}dx}{O_kF'_k\times\pi'_k};\end{cases}$$

Lorsque le point D *est dans une travée quelconque située à droite de* A_k, *celle* $A_{m-1}A_m$ *par exemple :*

$$(8)\quad\begin{cases}\dfrac{M}{O_kA_k}=P\dfrac{\overset{D\,\overline{A}_m}{\underset{D}{M}}(b-c'_k)\,\rho_{k+1}\times\rho_{k+2}\times\ldots\ldots\times\rho_{m-1}\times\frac{u_m-x}{u_m\times I}dx}{O_kO'_k\times\pi'_k},\\[2ex] T=P\dfrac{\overset{D.\overline{A}_m}{\underset{D}{M}}-(b-c_k)\,\rho_{k+1}\times\rho_{k+2}\times\ldots\ldots\times\rho_{m-1}\times\frac{u_m-x}{u_m\times I}dx}{O_kF'_k\times\pi'_k}.\end{cases}$$

2° LA CHARGE MOBILE SE TROUVE SUR LE TRONÇON A_0 (1).

En suivant identiquement la même marche que dans l'hypothèse précédente, on arrive aux résultats suivants :

Digitized by Google

Lorsque le point D *est dans la partie de poutre* (1) A_{k-1} :

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{M}{O_kA_k} = -P\,\dfrac{\overset{D.A_{k-1}}{\underset{D}{MY}}\dfrac{\xi - c'_k}{I}dx + \overset{A_{k-1}\bar{A}_{k-2}}{\underset{D}{MY}}\dfrac{(a+c'_k)(u'_{k-1}-x)}{v'_{k-1}\times I}dx}{O_kO'_k\times\pi'_k}, \\ T = -P\,\dfrac{\overset{D.A_{k-1}}{\underset{D}{MY}}\dfrac{-(\xi - c_k)}{I}dx + \overset{A_{k-1}\bar{A}_{k-2}}{\underset{D}{MY}}\dfrac{-(a+c_k)(u'_{k-1}-x)}{v'_{k-1}\times I}dx}{O_kF'_k\times\pi'_k}; \end{cases}$$

Lorsque le point D *est dans une travée quelconque située à gauche de* A_{k-1}, *celle* $A_{i-1}A_i$ *par exemple :*

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{M}{O_kA_k} = -P\,\dfrac{\overset{D.\bar{A}_{i-1}}{\underset{D}{MY}}(a+c'_k)\,\rho'_{k-1}\times\rho'_{k-2}\times\ldots\ldots\times\rho'_{i+1}\times\dfrac{u'_i-x}{v'_i\times I}dx}{O_kO'_k\times\pi'_k}, \\ T = -P\,\dfrac{\overset{D.\bar{A}_{i-1}}{\underset{D}{MY}}-(a+c_k)\,\rho'_{k-1}\times\rho'_{k-2}\times\ldots\ldots\times\rho'_{i+1}\times\dfrac{u'_i-x}{v'_i\times I}dx}{O_kF'\times\pi'_k}. \end{cases}$$

Ces formules établies, construisons les diagrammes suivants : 1° Par le centre O'_k correspondant au point C (*fig. 10*, pl. 201), menons une droite faisant un angle égal à $+45°$ avec la ligne A_oA_n et limitons-la à ses intersections α'_{k-1}, α'_k, avec les verticales des appuis A_{k-1}, A_k ; puis, à partir du point α'_k, traçons la ligne brisée $\alpha'_k\ \alpha'_{k+1}\ \alpha'_{k+2}\ldots\ldots$, dont les côtés passent par les foyers de droite des travées situées à droite de A_k, et dont les sommets se trouvent sur les verticales des appuis ; enfin, à partir du point α'_{k-1}, traçons la ligne brisée $\alpha'_{k-1}\ \alpha'_{k-2}\ \alpha'_{k-3}\ldots\ldots$, dont les côtés passent par les foyers de gauche des travées situées à gauche de A_{k-1}. Nous désignerons, d'une manière générale, par z_1 une ordonnée quelconque de ce diagramme ;

2° Par le centre fixe O_k de la travée (*fig. 11*, pl. 201), menons une droite faisant un angle égal à $-45°$ avec A_oA_n et limitons-la à ses intersections α''_{k-1}, α''_k, avec les verticales des appuis A_{k-1} et A_k ; puis, à partir des points α''_{k-1} et α''_k, achevons la construction du diagramme, comme il a été dit au 1°. Nous désignerons, d'une manière générale, par z_2 une ordonnée quelconque de ce diagramme.

Digitized by Google

Les ordonnées z_1 et z_2 ont les valeurs suivantes :

En un point quelconque de la travée $A_{k-1}A_k$;

$$z_1 = \xi - c'_k \quad ; \quad z_2 = -(\xi - c_k);$$

En un point quelconque de la travée A_kA_{k+1} :

$$z_1 = \frac{(b - c'_k)(u_{k+1} - x)}{u_{k+1}} \quad ; \quad z_2 = -\frac{(b - c_k)(u_{k+1} - x)}{u_{k+1}};$$

En un point quelconque de la travée $A_{m-1}A_m$:

$$z_1 = (b - c'_k)\,\rho_{k+1} \times \rho_{k+2} \times \ldots\ldots \times \rho_{m-1} \times \frac{u_m - x}{u_m};$$

$$z_2 = -(b - c_k)\,\rho_{k+1} \times \rho_{k+2} \times \ldots\ldots \times \rho_{m-1} \times \frac{u_m - x}{u_m};$$

En un point quelconque de la travée $A_{k-2}A_{k-1}$:

$$z_1 = \frac{(a + c'_k)(u'_{k-1} - x)}{v'_{k-1}} \quad , \quad z_2 = -\frac{(a + c_k)(u'_{k-1} - x)}{v'_{k-1}};$$

En un point quelconque de la travée $A_{i-1}A_i$:

$$z_1 = (a + c'_k)\,\rho'_{k-1} \times \rho'_{k-2} \times \ldots\ldots \times \rho'_{i-1} \times \frac{u'_i - x}{v'_i};$$

$$z_2 = -(a + c_k)\,\rho'_{k-1} \times \rho'_{k-2} \times \ldots\ldots \times \rho'_{i+1} \times \frac{u'_i - x}{v'_i}.$$

Ces expressions différentes de z_1 et de z_2 entrent dans les formules (7), (8), (9) et (10); si on introduit z_1 et z_2 dans les dites formules, il vient :

Lorsque le point D *se trouve dans la partie de poutre* (2) A_k :

$$(7^{bis}) \quad \frac{M}{O_kA_k} = P\,\frac{\overset{D.\overrightarrow{A}_{k+1}}{\underset{D}{\int}} \frac{MY}{I} z_1\,dx}{O_kO'_k \times \pi'_k}, \qquad T = P\,\frac{\overset{D.\overrightarrow{A}_{k+1}}{\underset{D}{\int}} \frac{MY}{I} z_2\,dx}{O_kF'_k \times \pi'_k};$$

Lorsque le point D *se trouve dans une travée quelconque située à droite de* A_k, *celle* $A_{m-1}A_m$ *par exemple :*

$$(8^{bis}) \quad \frac{M}{O_kA_k} = P\,\frac{\overset{D.\overline{A}_m}{\underset{D}{\int}} \frac{MY}{I} z_1\,dx}{O_kO'_k \times \pi'_k}, \qquad T = P\,\frac{\overset{D.\overline{A}_m}{\underset{D}{\int}} \frac{MY}{I} z_2\,dx}{O_kF'_k \times \pi'_k};$$

Lorsque le point D *se trouve dans la partie de poutre* (1) A_{k-1} :

$$(9^{bis}) \quad \frac{M}{O_kA_k} = -P\,\frac{\overset{D.\overline{A}_{k-2}}{\underset{D}{\int}} \frac{MY}{I} z_1\,dx}{O_kO'_k \times \pi'}, \qquad T = -P\,\frac{\overset{D\ \overline{A}_{k-2}}{\underset{D}{\int}} \frac{MY}{I} z_2\,dx}{O\ F'_k \times \pi'_k};$$

Digitized by Google

Lorsque le point D *se trouve dans une travée quelconque située à gauche de* A_{k-1}, *celle* $A_{i-1}A_i$ *par exemple :*

$$(10^{bis})\quad \frac{M}{O_kA_k} = -P\frac{\overset{D.\overline{A}_{i-1}}{\underset{D}{MY}\frac{z_1}{I}dx}}{O_kO'_k \times \pi'_k}, \qquad T = -P\frac{\overset{D.\overline{A}_{i-1}}{\underset{D}{MY}\frac{z_2}{I}dx}}{O_kF'_k \times \pi'_k}.$$

En se rappelant que D désigne toujours le point d'application de la charge mobile, on traduit comme suit, les formules qui précèdent :

THÉORÈME I. — *Étant données une poutre continue parcourue par une charge mobile, et une section* C *arbitrairement choisie dans une travée quelconque* $A_{k-1}A_k$, *si on applique successivement des efforts fictifs verticaux* $1^o\ \frac{z_1}{I}dx$, $2^o\ \frac{z_2}{I}dx$, *tout le long de cette poutre, et qu'on considère les réactions fictives correspondantes, développées aux extrémités de chaque travée supposée séparée du reste de la poutre et reposant librement sur ses appuis,* — z_1 et z_2 *étant les ordonnées des diagrammes polygonaux précédemment définis :*

A. — (1°) *La somme des moments,* — *par rapport à un point quelconque* D *appartenant à une travée* $A_{m-1}A_m$ *située à droite de celle* $A_{k-1}A_k$, — *des forces fictives* $\frac{z_1}{I}dx$ *réparties entre ce point et l'appui* A_m, *et de la réaction fictive en cet appui, est proportionnelle au moment fléchissant que la charge mobile produit au point* C *lorsqu'elle passe en* D.

(2°) *La somme des moments,* — *par rapport à un point quelconque* D *appartenant à une travée* $A_{i-1}A_i$ *située à gauche de celle* $A_{k-1}A_k$, — *des forces fictives* $\frac{z_1}{I}dx$ *réparties entre ce point et l'appui* A_{i-1}, *et de la réaction fictive en cet appui, est proportionnelle au moment fléchissant que la charge mobile produit au point* C *lorsqu'elle passe en* D.

(3°) *La somme des moments,* — *par rapport à un point quelconque* D *appartenant au tronçon de travée* CA_k, — *des forces fictives* $\frac{z_1}{I}dx$ *réparties entre ce point et l'appui de droite* A_{k+1} *de la travée adjacente à ce tronçon, et de la réaction fictive en cet appui, est proportionnelle au moment fléchissant que la charge mobile produit au point* C *lorsqu'elle passe en* D.

Digitized by Google

(4°) *La somme des moments, — par rapport à un point quelconque* D *appartenant au tronçon de travée* CA_{k-1}, *— des forces fictives* $\frac{z_1}{I}\,dx$ *réparties entre ce point et l'appui de gauche* A_{k-2} *de la travée adjacente à ce tronçon, et de la réaction fictive en cet appui, est proportionnelle au moment fléchissant que la charge mobile produit au point* C *lorsqu'elle passe en* D.

B. — *Les quatre propositions qui précèdent s'appliquent également aux forces fictives* $\frac{z_2}{I}\,dx$ *et aux efforts tranchants développés au point* C *par la charge mobile.*

Les (1°) et (2°) peuvent encore être énoncés de la manière suivante :

Le moment fléchissant fictif développé par les forces fictives $\frac{z_1}{I}\,dx$, *en un point quelconque* D *d'une travée située soit à droite, soit à gauche de celle* $A_{k-1}A_k$, *— la dite travée étant considérée comme séparée du reste de la poutre et comme reposant librement sur ses appuis, — est proportionnel au moment fléchissant que la charge mobile produit en* C *lorsqu'elle passe en* D.

En se référant à des propriétés connues des courbes funiculaires et à la définition des lignes d'influence, on transforme comme suit, le théorème qui précède.

Théorème II. — *Étant données une poutre continue parcourue par une charge mobile, et une section* C *arbitrairement choisie dans une travée quelconque* $A_{k-1}A_k$, *si on applique successivement des efforts fictifs* 1° $\frac{z_1}{I}\,dx$, 2° $\frac{z_2}{I}\,dx$, *tout le long de la poutre, —* z_1 *et* z_2 *étant les ordonnées des diagrammes polygonaux précédemment définis, — qu'avec des distances polaires arbitraires, on construise les deux courbes funiculaires respectivement relatives à ces efforts, qu'on leur mène des lignes de fermeture correspondantes à chacune des travées autres que celle* $A_{k-1}A_k$, *et qu'enfin on prolonge jusqu'à la verticale du point* C *les lignes de fermeture afférentes aux travées contiguës à celle* $A_{k-1}A_k$.

Les segments de verticales, compris entre chacune de ces courbes et les lignes de fermeture y relatives, sont respectivement proportionnels aux ordonnées des lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant développés dans la section C.

Digitized by Google

§ 55. — Propriétés des courbes funiculaires correspondantes aux efforts fictifs $\frac{z_1}{I}\,dx$ et $\frac{z_2}{I}\,dx$.

THÉORÈME I. — *Dans la courbe funiculaire des* $\frac{z_1}{I}\,dx$, *les lignes de fermeture correspondantes aux travées adjacentes à celle* $A_{k-1}A_k$ *où se trouve le point* C, *se coupent sur la verticale de ce point.*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la résultante des efforts fictifs $\frac{z_1}{I}\,dx$ répartis entre les appuis A_{k-2} et A_{k+1}, et des réactions fictives en ces appuis, passe par le point C; ou, par suite, que la somme des moments de ces forces par rapport à C soit nulle.

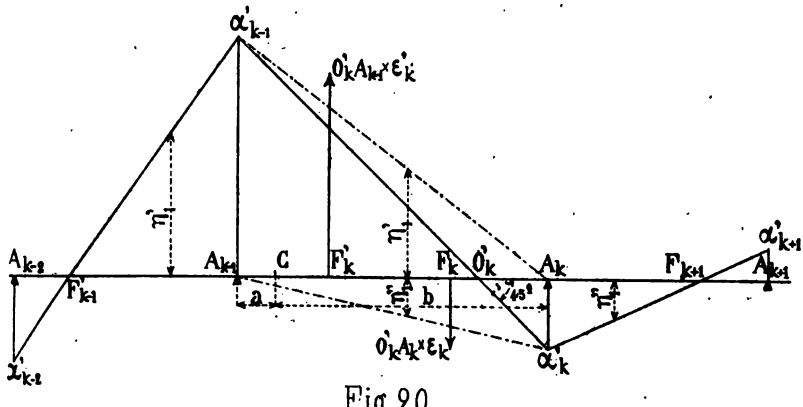


Fig. 20

Une ordonnée quelconque du diagramme des z_1 ($\alpha'_{k-2}\alpha'_{k-1}\alpha'_k\,\alpha'_{k+1}$) (*fig. 20*), est égale à la somme algébrique $\eta'_1 + \eta''_1$ des ordonnées correspondantes des diagrammes $\alpha'_{k-2}\alpha'_{k-1}A_k$ et $\alpha'_{k+1}\,\alpha'_kA_{k-1}$; on a donc

$$(a) \qquad \frac{z_1}{I}\,dx = \frac{\eta'_1}{I}\,dx + \frac{\eta''_1}{I}\,dx.$$

Or, en vertu du lemme du § 52, la résultante des efforts fictifs

Digitized by Google

$\frac{\eta'_1}{I}\,dx$ et de la réaction fictive correspondante en A_{k-2} est appliquée en F'_k; elle a pour valeur

$$O'_kA_{k-1} \times \varepsilon'_k,$$

puisque

$$A_{k-1}\alpha'_{k-1} = -A_{k-1}O'_k = +O'_kA_{k-1}.$$

De même, la résultante des efforts fictifs $\frac{\eta''_1}{I}\,dx$ et de la réaction fictive correspondante en A_{k+1} est appliquée en F_k, et elle a pour valeur

$$O'_kA_k \times \varepsilon_k,$$

puisque $A_k\alpha'_k = O'_kA_k$.

Mais il résulte de la relation (a) que la résultante des efforts fictifs $\frac{z_1}{I}\,dx$ et des réactions fictives correspondantes en A_{k-1} et en A_{k+1}, est la même que celle des forces fictives

$$O'_kA_{k-1} \times \varepsilon'_k \qquad \text{et} \qquad O'_kA_k \times \varepsilon_k.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette résultante passe en C est :

$$\frac{O'_kA_k \times \varepsilon_k}{O'_kA_{k-1} \times \varepsilon'_k} = \frac{-CF'_k}{CF_k},$$

ou, à cause de l'équation (h) (§ 52, p. 98),

$$\frac{O'_kA_k}{O'_kA_{k-1}} \times \frac{O_kF'_k}{O_kF_k} = \frac{CF'_k}{CF_k}.$$

Cette relation n'est autre que celle (p) démontrée au paragraphe 52, p. 100; la condition ci-dessus est donc satisfaite, ce qui justifie l'énoncé.

THÉORÈME II. — *Dans la courbe funiculaire des* $\frac{z_2}{I}\,dx$, *les lignes de fermeture correspondantes aux travées adjacentes à celle* $A_{k-1}A_k$ *où se trouve le point* C, *sont parallèles.*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il y ait coïncidence entre le premier et le dernier rayon polaire du polygone des forces formé : 1° de la réaction fictive en A_{k+1}, 2° des forces fictives $\frac{z_2}{I}\,dx$ réparties entre A_{k+1} et A_{k-2}, 3° de la réaction fic-

Digitized by Google

tive en A_{k-2}; ou, par suite, que la résultante de ces efforts soit nulle.

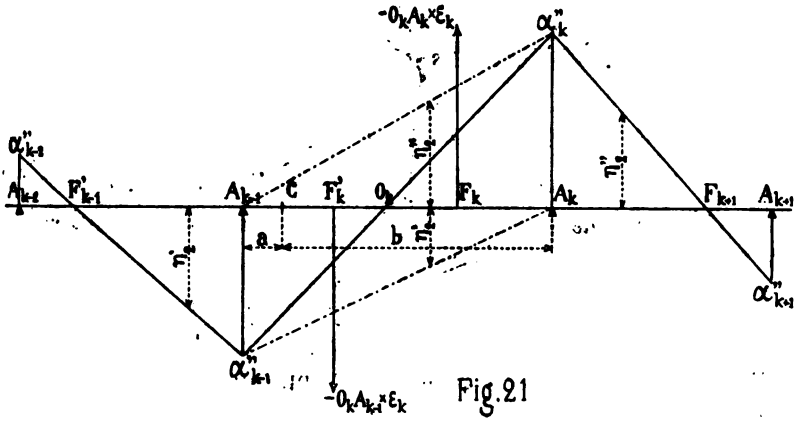


Fig. 21

Une ordonnée quelconque du diagramme des z_2 ($\alpha''_{k-2}\alpha''_{k-1}\alpha''_k\alpha''_{k+1}$) *(fig. 21)* est égale à la somme algébrique $\eta'_2+\eta''_2$ des ordonnées correspondante des diagrammes $\alpha''_{k-2}\alpha''_{k-1}A_k$ et $\alpha''_{k+1}\alpha''_kA_{k-1}$; on a donc

$$(a) \qquad \frac{z_2}{I}dx=\frac{\eta'_2}{I}dx+\frac{\eta''_2}{I}dx.$$

Or, la résultante des efforts fictifs $\frac{\eta'_2}{I}dx$ et de la réaction fictive en A_{k-2}, a pour valeur

$$-O_kA_{k-1}\times\varepsilon'_k,$$

puisque $$A_{k-1}\alpha''_{k-1}=-O_kA_{k-1}.$$

De même, la résultante des efforts fictifs $\frac{\eta''_2}{I}dx$ et de la réaction fictive en A_{k+1}, a pour valeur

$$-O_kA_k\times\varepsilon_k,$$

puisque $$A_k\alpha''_k=-O_kA_k.$$

La résultante des efforts fictifs $\frac{z_2}{I}dx$ et des réactions fictives correspondantes en A_{k-2} et A_{k+1}, a donc pour expression

$$(b) \qquad -O_kA_{k-1}\times\varepsilon'_k-O_kA_k\times\varepsilon_k.$$

Mais, d'autre part, (*h*) et (*k'*) (§ 52) donnent

$$-\frac{\varepsilon'_k}{\varepsilon_k}=\frac{O_kA_k}{O_kA_{k-1}},$$

ou $$-O_kA_{k-1}\times\varepsilon'_k-O_kA_k\times\varepsilon_k=0.$$

Digitized by Google

La résultante exprimée par la formule (*b*) est donc nulle ; ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME III. — *Dans les courbes funiculaires des* $\frac{z_1}{I}\,dx$ *et des* $\frac{z_2}{I}\,dx$, *les lignes de fermeture correspondantes aux travées qui précèdent celle* $A_{k-1}A_k$ *où se trouve le point* C, *sont en ligne droite; il en est de même des lignes de fermeture correspondantes aux travées qui suivent celle* $A_{k-1}A_k$.

Revenons aux calculs du § 54.

Pour déterminer les déplacements entrant dans les expressions (4) (§ 51) de M et de T, nous avons dû supposer les deux tronçons de poutre A_0C, CA_n, privés de leurs liaisons surabondantes. Dans le cas où le point D d'application de la charge P se trouve dans une travée quelconque $A_{m-1}A_m$, située à droite de celle $A_{k-1}A_k$ où est le point C, nous avons considéré comme indépendantes de l'élasticité les liaisons qui imposent la fixité des points A_{m-1} et A_m.

Or, d'après une remarque déjà plusieurs fois renouvelée, nous savons qu'on peut également regarder comme telles, les liaisons qui imposent la fixité de deux appuis quelconques, ceux A_k et A_n par exemple. Dans cette hypothèse, les formules finales (8 *bis*) du § 54, deviennent :

$$(8\ ter)\qquad \frac{M}{O_kA_k} = P\,\frac{\overset{D.\overline{A_n}}{M_D Y\,\frac{z_1}{I}\,dx}}{O_kO'_k \times \pi'_k}\ ;\quad T = P\,\frac{\overset{D,\overline{A_n}}{M_D Y\,\frac{z_2}{I}\,dx}}{O_kF'_k \times \pi'_k}\ .$$

Il résulte de ces expressions et de propriétés connues des courbes funiculaires que :

Si, avec des distances polaires arbitraires, on trace les deux courbes funiculaires des $\frac{z_1}{I}dx$ et des $\frac{z_2}{I}dx$, et qu'on leur mène des lignes de fermeture les coupant respectivement en leurs points d'intersection avec les verticales des appuis A_k et A_n, les segments de verticales, compris entre ces courbes et ces lignes de fermeture, sont proportionnels aux ordonnées des portions des lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant en C, afférentes à la partie de poutre A_kA_n.

Digitized by Google

En comparant la construction qui vient d'être indiquée, à celle donnée au théorème II du paragraphe 54, on voit que la première ne diffère de la seconde que par la substitution d'une ligne de fermeture unique aux lignes de fermeture partielles répondant à chaque travée.

Ces deux constructions devant nécessairement donner les mêmes résultats, il faut que la ligne de fermeture unique coïncide avec les lignes de fermeture partielles qui, par conséquent, sont en ligne droite.

Même démonstration en ce qui concerne les lignes de fermeture partielles correspondantes aux travées situées à gauche de celle $A_{k-1}A_k$.

COROLLAIRE. — En rapprochant les théorèmes I et II, du théorème III, on voit immédiatement que :

1° *Dans la courbe funiculaire des* $\frac{z_1}{I}dx$, *les deux droites formées 1° par les lignes de fermeture des travées qui précèdent celle* l_k *où se trouve le point* C *considéré, 2° par les lignes de fermeture des travées qui suivent cette dernière, se coupent sur la verticale du point* C.

2° *Dans la courbe funiculaire des* $\frac{z_2}{I}dx$, *les deux droites analogues aux précédentes sont parallèles.*

REMARQUE. — Les portions de la courbe funiculaire des $\frac{z_1}{I}dx$, correspondantes à deux travées adjacentes quelconques l_{m-1} et l_m, se raccordent tangentiellement sur la verticale de l'appui A_m commun à ces travées, puisque dans le polygone des forces fictives $\frac{z_1}{I}dx$, le dernier rayon polaire des forces fictives de la travée l_{m-1} est en même temps le premier rayon polaire des forces fictives de la travée l_m.

La même remarque s'applique à la courbe funiculaire des $\frac{z_2}{I}dx$.

Digitized by Google

§ 56. — Construction des lignes d'influence du Moment fléchissant et de l'Effort tranchant développés en une section C arbitrairement choisie dans une travée l_k quelconque.

Le théorème II du § 54 ramène cette construction à celle des deux courbes funiculaires correspondantes aux forces fictives verticales $\frac{z_1}{I}\,dx$ et $\frac{z_2}{I}dx$ réparties tout le long de la ligne moyenne de la poutre.

Nous opérerons conformément aux indications données au § 45 pour les tracés analogues relatifs à l'arc encastré.

La ligne moyenne de la poutre continue a été précédemment divisée en un certain nombre de parties Δx, égales entre elles, pour la détermination des verticales trisectrices (§ 50).

Conservons cette division et, aux milieux des éléments Δx, appliquons des forces fictives verticales $z_1 \frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ et $z_2 \frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ descendantes ou ascendantes suivant que les z_1 ou les z_2 sont positifs ou négatifs (Pl. 201, *Fig. 12* à *19*).

Cela fait, avec des distances polaires B_1 et B_2, positives ou négatives, et d'ailleurs pour l'instant arbitraires, traçons les deux polygones de ces forces fictives *(fig. 13* et *14* et *fig. 17* et *18)* (*), en ayant soin de commencer par l'extrémité A_0 de la poutre et de placer les pôles à gauche, ou à droite, des verticales choisies pour porter bout à bout les forces fictives, suivant que B_1 et B_2 sont positifs ou négatifs ; construisons les deux polygones funiculaires y relatifs $a_0 H_1 a_{k-1} C_1 m$.... *(fig. 15)* (**) et $a'_0 H_2 a'_{k-1} C_2 a'_k H_2 a'_n$ *(fig. 19)* ; menons-leur des lignes de fermeture correspondantes aux travées autres que celle l_k qui contient la section C; enfin, prolongeons les lignes de fermeture des travées l_{k-1} et l_{k+1} jusqu'à la verticale du point C.

Ces polygones funiculaires ont pour limites, lorsque Δx

(*) Pour ne pas surcharger les figures, chacun de ces polygones a été scindé en deux parties, et toutes les forces fictives n'y ont pas été représentées.

(**) Les dimensions de la planche n'ont pas permis d'indiquer en entier ce polygone; la remarque I (page 121) lève cette difficulté.

Digitized by Google

décroît indéfiniment, les deux courbes funiculaires des $\frac{z_1}{I} dx$ et des $\frac{z_2}{I} dx$, lesquelles jouissent des propriétés énoncées au § 55.

Donc :

1° Dans chacun des polygones en question, les lignes de fermeture des travées qui précèdent celle l_k doivent former une seule ligne droite ; celles des travées qui suivent l_k doivent former une autre droite.

2° Dans le polygone funiculaire des $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, ces deux droites doivent se couper sur la verticale de C au point c. (Cette vérification n'apparaît pas sur la figure 15, la partie du polygone funiculaire des $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ correspondante aux travées qui suivent celle l_k n ayant pas été tracée.) Dans le polygone des $z_2 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ les droites en question ($a'_0 c_2$ et $a'_n \gamma_2$) doivent être parallèles.

Ce sont là des vérifications de l'exactitude des tracés.

Cela posé, soient K_1H_1, K_2H_2, les segments interceptés sur la verticale d'un point quelconque D par chacun des polygones funiculaires et par les lignes de fermeture correspondantes. Par des considérations identiques à celles exposées au § 45 pour l'arc encastré, on établirait, en partant des équations fondamentales (7 *bis*) (8 *bis*) (9 *bis*) et (10 *bis*) du § 54, que, lorsque la charge mobile passe en D, le moment fléchissant M_C et l'effort T_C dans la section C sont donnés par les relations

$$\frac{M_c}{O_k A_k} = P \times \frac{\frac{n\Delta x}{I_m} \times B_1}{O_k O'_k \times \pi'_k} \times K_1 H_1 \quad (*),$$

$$T_c = P \times \frac{\frac{n\Delta x}{I_m} \times B_1}{O_k F'_k \times \pi'_k} \times K_2 H_2.$$

(*) On remarquera que M_C étant un moment et $O_k A_k$ une longueur, le quotient $\frac{M_c}{O_k A_k}$ est une *force*.

Digitized by Google

En remplaçant la composante au foyer de gauche π'_k par sa valeur tirée de la formule

$$\Pi'_k = \frac{I_m}{n\Delta x}\,\pi'_k,$$

qui est celle (*f'*) du § 50 (page 89), à la substitution près de l'indice *k* à l'indice *i*, il vient :

$$\frac{M_C}{O_kA_k} = \frac{P \times B_1}{O_kO'_k \times \Pi'_k} K_1H_1;$$

$$T_C = \frac{P \times B_2}{O_kF'_k \times \Pi'_k} K_2H_2.$$

Soient maintenant $\overline{P}$, $\overline{B_1}$, $\overline{B_2}$, $\overline{O_kO'_k}$, $\overline{O_kF'_k}$, $\overline{\Pi'_k}$, $\overline{K_1H_1}$ et $\overline{K_2H_2}$ les longueurs brutes, abstraction faite de toute échelle, des lignes qui, sur l'épure, représentent les quantités désignées par ces lettres non surmontées d'un tiret ; soient, en outre, $\frac{1}{f}$ l'échelle des forces et $\frac{1}{l}$ celle des longueurs ; on a :

$$P = \overline{P} \times f, \quad B_1 = \overline{B_1} \times l, \quad B_2 = \overline{B_2} \times l, \quad O_kO'_k = \overline{O_kO'_k} \times l,$$
$$O_kF'_k = \overline{O_kF'_k} \times l, \quad \Pi'_k = \overline{\Pi'_k} \times l, \quad K_1H_1 = \overline{K_1H_1} \times l, \quad K_2H_2 = \overline{K_2H_2} \times l;$$

et en substituant dans les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$\frac{M_C}{O_kA_k} = \left(\frac{\overline{P} \times \overline{B_1}}{\overline{O_kO'_k} \times \overline{\Pi'_k}} \overline{K_1H_1}\right) f,$$

$$T_C = \left(\frac{\overline{P} \times \overline{B_2}}{\overline{O_kF'_k} \times \overline{\Pi'_k}} \overline{K_2H_2}\right) f.$$

Or, on peut toujours prendre pour distances polaires, les valeurs suivantes :

(*a*) $$\overline{B_1} = \frac{\overline{O_kO'_k} \times \overline{\Pi'_k}}{\overline{P}},$$

(*b*) $$\overline{B_2} = \frac{\overline{O_kF'_k} \times \overline{\Pi'_k}}{\overline{P}};$$

auquel cas les relations précédentes se réduisent à

(*c*) $$\frac{M_C}{O_kA_k} = \overline{K_1H_1} \times f,$$

(*d*) $$T_C = \overline{K_2H_2} \times f;$$

Digitized by Google

et l'on peut dire, dès lors, que les segments de verticales K_1H_1 et K_2H_2, correspondants aux polygones funiculaires tracés avec les distances polaires sus-indiquées, représentent, *à l'échelle des forces*, les quantités $\frac{M_c}{O_k A_k}$ et T_c, ou encore qu'ils sont égaux aux ordonnées des lignes d'influence desdites quantités.

Par suite, si on les porte en ordonnées à partir de deux horizontales $U_1U'_1$ et $U_2U'_2$ choisies comme axes des abscisses, on obtiendra les lignes d'influence cherchées $a_oH_1a_{k-1}C_1a_ka_n$ et $a'_oH_2a'_{k-1}C_2C'_2a'_ka'_n$ *(fig. 15 et 19)*.

Remarque I. — Au lieu de construire en une seule fois le polygone funiculaire des forces fictives $z_1 \frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, pour toute la poutre, on pourra procéder travée par travée, ce qui aura l'avantage de rendre les tracés plus clairs et d'éviter qu'ils ne sortent des limites de l'épure.

On tracera donc autant de polygones des forces fictives et autant de polygones funiculaires qu'il y a de travées, en ayant soin de tenir compte de ce que le dernier côté du polygone funiculaire correspondant à une travée et le premier côté du polygone funiculaire de la travée suivante doivent être en ligne droite, ainsi qu'il résulte de la remarque finale du § 55.

Il sera également commode de faire en sorte que les lignes de fermeture des polygones funiculaires successifs, lesquelles doivent être en ligne droite, coïncident avec l'axe horizontal $U_1U'_1$ auquel on rapporte la ligne d'influence ; ces polygones funiculaires constitueront alors la ligne d'influence cherchée elle-même, et l'on aura évité le report d'ordonnées indiqué plus haut.

Pour cela, on construira, avec un pôle quelconque de distance polaire B_1, un polygone funiculaire d'essai des forces fictives $z_1 \frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, pour la première travée A_oA_1 seulement ; la ligne de fermeture de ce polygone sera en général oblique ; on corrigera la position du pôle, suivant une règle connue, de manière à ramener ladite ligne de fermeture à être horizontale ; puis on retracera le polygone funiculaire en question, en partant du point de

Digitized by Google

$U_1U'_1$ situé sur la verticale de l'appui A_o ; le dernier côté de ce polygone coupera $U_1U'_1$ sur la verticale de A_1 et fera connaître la direction à donner au premier côté du polygone funiculaire des $\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}z_1$ correspondant à la travée suivante A_1A_2. On construira ce nouveau polygone, dont le dernier côté coupera $U_1U'_1$ sur la verticale de A_2. On continuera ainsi, de travée en travée, jusqu'à la verticale de la section C, relativement à laquelle on cherche la ligne d'influence du moment fléchissant M.

On obtiendra, de la sorte, toute la portion de la ligne d'influence de M, correspondante à la partie de poutre A_o C.

On construira de la même manière, la portion de la ligne d'influence qui correspond à la partie de poutre CA_n, en partant de la dernière travée $A_{n-1}A_n$, au lieu de la première A_oA_1, et en allant de travée en travée jusqu'à la verticale de C.

Il est clair qu'au lieu de commencer les tracés par les deux travées de rive, on peut commencer par deux travées quelconques $A_{i-1}A_i$ et $A_{m-1}A_m$, situées, l'une avant, l'autre après la travée $A_{k-1}A_k$ qui contient le point C.

Ainsi, on construira le polygone funiculaire des forces fictives $z_1\frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ pour la travée $A_{i-1}A_i$, par exemple; et on corrigera la position de la ligne de fermeture de ce polygone de manière à la faire coïncider avec l'horizontale U_1U_1'. En prolongeant respectivement le premier et le dernier côté dudit polygone, à gauche de la verticale de l'appui A_{i-1} et à droite de la verticale de l'appui A_i, on aura le dernier côté du polygone funiculaire correspondant à la travée $A_{i-2}A_{i-1}$ et le premier côté du polygone funiculaire correspondant à la travée A_iA_{i+1}. On pourra dès lors tracer ces derniers polygones, et on continuera ainsi, de proche en proche, d'une part en allant de la travée $A_{i-2}A_{i-1}$ à la travée de rive A_oA_1, et d'autre part en allant de la travée A_iA_{i+1} jusqu'à la section C. On obtiendra ainsi la partie de la ligne d'influence afférente à la partie de poutre A_o C.

Une construction semblable, faite en partant de la travée A_{m-1}

Digitized by Google

A_m, fera connaître la partie de la ligne d'influence afférente à la partie de poutre $C A_n$.

Les indications qui précèdent s'appliquent aussi au polygone funiculaire des forces fictives $z_2 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, c'est-à-dire à la ligne d'influence de l'effort tranchant.

Remarque II. — Lorsque la section C dont on cherche les lignes d'influence, se trouve entre les foyers F_k et F'_k, le centre O'_k correspondant est situé en dehors de la travée, et il est d'autant plus éloigné, soit dans la direction $A_{k-1} A_0$, soit dans celle $A_k A_n$, que le point C est plus rapproché du centre fixe O_k de la travée ; il est rejeté à l'infini positif ou négatif lorsque C coïncide avec O_k (§ 52, p. 101 : *Discussion.*).

Il en résulte que, pour certaines positions de la section C, entre les foyers, la longueur $O_k O'_k$ est très grande (*fig.* 22, p. 124); il en est de même, par suite, de la distance polaire $\overline{B_1}$, d'après la formule (*a*) (page 120), et des efforts fictifs $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, d'après la construction même du diagramme des z_1.

Le polygone de ces efforts fictifs peut alors prendre des dimensions incompatibles avec celles de l'épure.

On obvie à cet inconvénient en apportant aux tracés sus-indiqués la modification suivante qui s'applique, d'ailleurs, quelle que soit la position du point C dans la travée.

Remarquons qu'on ne modifie en rien le polygone funiculaire des efforts fictifs $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, en multipliant par un même coefficient lesdits efforts fictifs et la distance polaire $\overline{B_1}$. Attribuons à ce coefficient la valeur $\frac{\lambda}{O_k O'_k}$, λ étant une longueur arbitrairement choisie ; les efforts fictifs à considérer deviennent alors

$$z_1 \frac{\lambda}{O_k O'_k} \times \frac{\frac{1}{n} I_m}{I} = z'_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I},$$

Digitized by Google

en posant

$$(e) \qquad z'_1 = z_1 \frac{\lambda}{O_k O'_k};$$

tandis que la distance polaire prend la valeur

$$(f) \qquad \overline{B'_1} = \frac{\overline{B_1} \times \overline{\lambda}}{\overline{O_k O'_k}} = \frac{\overline{\lambda} \times \overline{\Pi'_k}}{\overline{P}}.$$

D'après (e), z_1 et z'_1 sont proportionnels; les côtés du diagramme des z'_1 coupent donc $A_o A_n$ aux mêmes points que les côtés correspondants de celui des z_1, savoir : aux foyers de gauche des travées qui précédent celle l_k, aux foyers de droite des travées qui suivent l_k, et enfin au point O'_k pour le côté répondant à la travée l_k.

Dès lors, pour tracer le diagramme des z'_1, il suffit d'en connaître une seule ordonnée. Calculons celle dont le pied est au centre fixe O_k de la travée l_k; en ce point on a

$$(z_1)_{O_k} = - O_k O'_k,$$

puisque le côté $\alpha'_{k-1}\,\alpha'_k$ du diagramme des z_1 fait un angle égal à — 45 degrés avec $A_o A_n$ et passe par O'_k. Donc, en vertu de (e),

$$(z'_1)_{O_k} = - O_k O'_k \frac{\lambda}{O_k O'_k} = - \lambda.$$

D'où la construction suivante (*fig.* 22) :

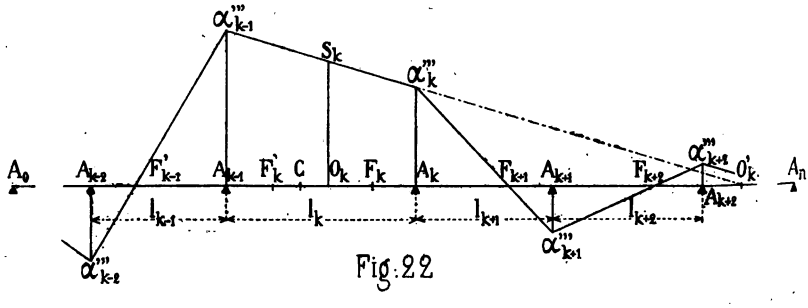


Fig. 22

Porter en ordonnée $O_k S_k = \lambda$, au-dessus de $A_o A_n$; joindre

Digitized by Google

$S_k O'_k$: la partie $\alpha''_{k-1}\alpha''_k$ de cette droite est le côté du diagramme des z'_1, qui correspond à la travée l_k ; enfin, achever le diagramme, en partant des points α''_{k-1} et α''_k comme il a été indiqué pour le diagramme des z_1.

RÉSUMÉ *des opérations à effectuer, pour déterminer les lignes d'influence du moment fléchissant* M $\left(\text{ou plus exactement de la quantité } \frac{M}{O_k A_k}\right)$ *et de l'effort tranchant* T *produits en une section* C *arbitrairement choisie dans une travée* l_k, *par le passage d'une charge mobile* P.

La construction des verticales trisectrices, des foyers, et des longueurs telles que Π'_k qui représentent les composantes aux foyers de gauche, étant préalablement faite, on devra :

1° Déterminer le centre fixe O_k de la travée, et le centre O'_k correspondant au point C (§ 52), puis les diagrammes polygonaux des z_1 (ou des z'_1) et des z_2 qui s'ensuivent immédiatement (§ 54).

2° Tracer deux polygones funiculaires de distances polaires $\overline{B_1} = \frac{\overline{O_k O'_k} \times \overline{\Pi'_k}}{\overline{P}}$ $\left(\text{ou } \overline{B'_1} = \frac{\overline{\lambda} \times \overline{\Pi'_k}}{\overline{P}}\right)$ et $\overline{B_2} = \frac{\overline{O_k F'_k} \times \overline{\Pi'_k}}{\overline{P}}$, et correspondants à des efforts fictifs verticaux, égaux respectivement à $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ $\left(\text{ou } z'_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}\right)$ et à $z_2 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, — n et I_m ayant les valeurs déjà employées pour la construction des verticales trisectrices et des longueurs telles que Π'_k. Mener à ces polygones des lignes de fermeture correspondantes aux travées autres que celle l_k, et prolonger jusqu'à la verticale du point C, les lignes de fermeture des travées adjacentes à celle l_k.

3° Ramener les ordonnées de ces polygones, mesurées à partir de leurs lignes de fermeture, à avoir leurs pieds sur les axes $U_1 U'_1$ et $U_2 U'_2$; joindre les extrémités de ces ordonnées par des droites, ou mieux par des lignes courbes, ce qui donne les lignes d'influence cherchées.

Ou bien, la détermination : 1° étant effectuée, construire les polygones funiculaires du 2°, conformément aux indications de la remarque I du présent paragraphe, ce qui supprime l'opération 3°.

Digitized by Google

§ 57. — Lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant, relatives aux différentes sections d'une même travée.

Supposons qu'on ait déterminé, comme il vient d'être dit, les lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant, relatives à une section C de la travée l_k.

Nous allons montrer comment les constructions faites à cet effet doivent être utilisées, pour simplifier les constructions similaires à effectuer pour la détermination des lignes d'influence correspondantes à une autre section quelconque C′ de la même travée.

1° Lignes d'influence de l'effort tranchant

Théorème. — *Le polygone funiculaire d'où se déduit la ligne d'influence de l'effort tranchant relative à une section* C′ *quelconque d'une travée* l_k, *est identique au polygone de même nature correspondant à la section* C *située dans la même travée.*

En effet :

1° Ces polygones correspondent aux efforts fictifs $z_2 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ qui ne changent pas de valeur quand on passe de la section C à la section C′, puisque le point O_k qui définit le diagramme de z_2, est fixe dans la travée ;

2° Leur distance polaire est la même, en vertu de la formule *(b)* (§ 56), qui ne contient que des constantes.

Ils sont donc identiques.

Par conséquent, un seul polygone funiculaire, celui des forces fictives $z_2 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, fait connaître les ordonnées des lignes d'influence de l'effort tranchant, relatives aux différentes sections d'une même travée l_k.

Conformément aux indications du § 56, on devra, pour chaque section considérée, prolonger les lignes de fermeture des travées l_{k-1} et l_{k+1} jusqu'à la verticale de cette section.

Digitized by Google

Il résulte de ce qui précède que, pour toutes les sections d'une même travée, les parties des lignes d'influence de l'effort tranchant, situées en dehors de ladite travée, sont identiques.

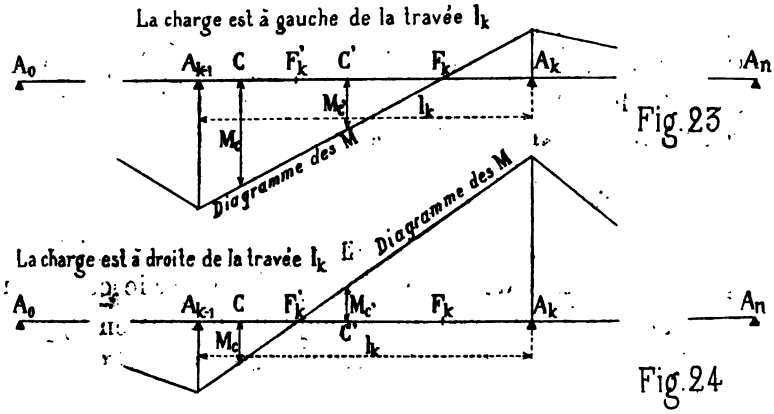
2° Lignes d'influence du moment fléchissant

A — *Parties de la ligne d'influence situées en dehors de la travée* l_k.

Théorème. — *Les ordonnées correspondantes à une même abscisse, des lignes d'influence relatives à deux sections* C *et* C′ *de la travée* l_k, *sont entre elles :*

1° *Pour la partie de ces lignes située à gauche de la travée* l_k, *comme les distances du foyer de droite* F_k *de cette travée aux sections* C *et* C′ ;

2° *Pour la partie de ces lignes située à droite de la travée* l_k, *comme les distances du foyer de gauche* F'_k *de cette travée aux sections* C *et* C′.



Considérons d'abord les portions de lignes d'influence situées à gauche de la travée l_k.

Quand la charge mobile se trouve sur la partie de poutre A_0A_{k-1}, le diagramme représentatif des moments fléchissants dans la travée l_k est, à chaque instant, une droite qui passe par le foyer de droite de ladite travée *(fig. 23)* et qui pivote autour de ce point, tandis que la charge se déplace (§ 50. *Foyers*). On a donc, en désignant par M_C et $M_{C'}$ les valeurs simultanées du moment fléchissant en C et en C′,

$$\frac{M_{C'}}{M_C} = \frac{F_k C'}{F_k C}.$$

Digitized by Google

Cette proportion ayant lieu quelle que soit la position de la charge mobile sur la partie de poutre A_0A_{k-1}, on en conclut que, dans cette région, les ordonnées correspondantes des lignes d'influence du moment fléchissant en C′ et du moment fléchissant en C, sont entre elles dans le rapport constant $\frac{F_kC'}{F_kC}$.

On démontrerait de même que, quand la charge mobile se trouve à droite de la travée l_k, on a (*fig.* 24)

$$\frac{M_{c'}}{M_c} = \frac{F'_kC'}{F'_kC}$$

et que, par suite, dans la région A_kA_n, les ordonnées des lignes d'influence du moment fléchissant en C′ et du moment fléchissant en C, sont entre elles dans le rapport constant $\frac{F'_kC'}{F'_kC}$.

Conséquence. — La partie de ligne d'influence du moment fléchissant en C′, située à gauche de l_k, se déduira de la partie correspondante de la ligne d'influence du moment fléchissant en C, par la réduction ou l'amplification des ordonnées de cette dernière, dans le rapport $\frac{F_kC'}{F_kC}$.

De même, la partie de la ligne d'influence du moment fléchissant en C′, située à droite de l_k, se déduira de la partie correspondante de la ligne d'influence du moment fléchissant en C, par la réduction, ou l'amplification, des ordonnées de cette dernière, dans le rapport $\frac{F'_kC'}{F'_kC}$.

Il est sous-entendu que les rapports en question sont susceptibles d'un signe : ils sont positifs si C et C′ sont d'un même côté de F_k, ou de F'_k ; ils sont négatifs si C et C′ sont de part et d'autre de F_k, ou de F'_k.

B. — *Partie de la ligne d'influence du moment fléchissant, située dans la travée* l_k.

Pour la détermination de cette partie de la ligne d'influence du moment fléchissant en C′, on appliquera la méthode générale indiquée pour la section C et complétée par la remarque I (§ 56) :

On cherchera le centre correspondant à la section C′ et on

Digitized by Google

tracera le côté du diagramme des z_1 (ou de celui des z'_1), situé dans la travée l_k.

Puis on construira successivement les deux tronçons de ligne d'influence, situés dans les parties de travée $A_{k-1}C$ et A_kC, en se fondant sur ce que :

1° Ces tronçons sont deux segments d'un polygone funiculaire de distance polaire $\overline{B}_1 = \frac{\overline{O_kO'_k} \times \overline{\Pi}'_k}{\overline{P}}$ $\left(\text{ou } \overline{B}'_1 = \frac{\overline{\lambda} \times \overline{\Pi}'_k}{\overline{P}}\right)$, correspondant aux forces fictives $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ $\left[\text{ou } z'_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}\right]$;

2° Ces tronçons respectifs doivent (§ 55. — *Remarque finale*) se raccorder tangentiellement avec les parties de ligne d'influence situées à gauche et à droite de la travée l_k, parties qui ont été déterminées précédemment.

§ 58. — Lignes d'influence du moment fléchissant, relatives à certaines sections remarquables.

La connaissance de la ligne d'influence du moment fléchissant en une section donnée, résulte immédiatement de celle du diagramme des z_1 (ou des z'_1) correspondant à cette section.

Nous allons passer en revue certaines sections remarquables, pour lesquelles les diagrammes en question présentent quelques particularités.

LIGNE D'INFLUENCE DU MOMENT FLÉCHISSANT EN UN APPUI QUELCONQUE DONNÉ.

Soit l'appui A_{k-1}.

Nous pouvons, à volonté, considérer la section A_{k-1} comme appartenant à la travée l_{k-1} ou à celle l_k (*).

Regardons-la, d'abord, comme faisant partie de cette dernière. Alors, le centre O'_k, qui lui correspond, coïncide avec le foyer de droite F_k de la travée l_k (§ 52. — *Discussion*). Le diagramme des z_1 est, en conséquence, celui représenté en traits pleins sur la figure 20 de la planche 202.

(*) Cette section peut, en effet, être prise immédiatement à gauche ou immédiatement à droite de l'appui.

Digitized by Google

La distance polaire à adopter pour le tracé du polygone funiculaire des forces fictives $z_1 \frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ est dans ce cas : $\overline{B}_1 = \frac{\overline{O_k F_k} \times \overline{\Pi}'_k}{\overline{P}}$ [§ 56, p. 120, — formule (*a*)].

Le diagramme des z'_1 qu'on peut également employer, est indiqué sur la même figure, en traits pointillés ; la distance polaire à prendre, pour construire le polygone funiculaire des forces fictives $z'_1 \frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$, a pour valeur $\overline{B}'_1 = \frac{\overline{\lambda} \times \overline{\Pi}'_k}{\overline{P}}$ [§ 56 ; p. 124 — formule (*f*)].

Si nous considérons, au contraire, la section A_{k-1} comme appartenant à la travée l_{k-1}, le diagramme des z_1 est celui en traits pleins de la figure 21 (pl. 202) et la distance polaire à adopter pour le tracé du polygone des forces fictives y relatives, est égale à $\frac{O_{k-1}F'_{k-1} \times \Pi'_{k-1}}{\overline{P}}$ (*).

Le diagramme des z'_1, qu'on peut également utiliser, est indiqué en traits pointillés (fig. 21), et la distance polaire à prendre pour le tracé du polygone funiculaire des forces fictives $z'_1 \frac{\frac{1}{n}I_m}{I}$ est égale à $\frac{\overline{\lambda} \times \overline{\Pi'_{k-1}}}{\overline{P}}$.

LIGNE D'INFLUENCE DU MOMENT FLÉCHISSANT EN UN FOYER QUELCONQUE.

Considérons le foyer de gauche F'_k de la travée l_k.

Le centre correspondant au point F'_k est l'appui de droite A_k de la travée ; le diagramme des z_1 est donc celui de la figure 22, (pl. 202).

Ce diagramme se confond avec A_0A_n dans la partie de poutre

(*) On remarquera que cette distance polaire est négative, car $O_{k-1}F'_{k-1}$ est négatif, puisque F'_{k-1} est à gauche de O_{k-1}.

Digitized by Google

située à droite de la travée l_k. Les efforts fictifs $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ sont par conséquent nuls dans cette partie, et il en résulte :

1° Que dans le polygone funiculaire des $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ la ligne de fermeture de la travée l_{k+1}, ligne qui, d'après les indications du § 56, doit être prolongée jusqu'à la verticale de la section considérée F'_k, se confond avec le dernier côté du dit polygone funiculaire;

2° que dans la partie $A_k A_n$ de la poutre, la ligne d'influence cherchée se confond avec l'horizontale $U_1 U'_1$ à laquelle on la rapporte.

Ce dernier résultat était évident *a priori*, puisqu'on sait que toute charge agissant à droite de la travée l_k ne détermine aucun moment fléchissant au foyer de gauche de cette travée.

La distance polaire à prendre pour le tracé du polygone funiculaire est, dans le cas considéré, égale à $\frac{\overline{O_k A_k} \times \overline{\Pi'_k}}{\overline{P}}$.

LIGNE D'INFLUENCE DU MOMENT FLÉCHISSANT AU CENTRE FIXE D'UNE TRAVÉE QUELCONQUE.

Considérons, par exemple, le centre fixe O_k de la travée l_k.

Quand la section C dont on cherche la ligne d'influence vient en O_k, le centre O'_k correspondant à cette section s'éloigne à l'infini positif ou négatif sur $A_o A_n$ (§ 52. — *Discussion*).

Par suite, le côté $\alpha'_{k-1}\ \alpha'_k$ du diagramme des z_1, qui s'obtient en menant par O'_k une droite faisant un angle de 45° avec $A_o A_n$, est rejeté à l'infini; les côtés dudit diagramme, appartenant aux travées qui précèdent celle l_k, coïncident alors avec les verticales des foyers de gauche de ces travées, tandis que les côtés appartenant aux travées qui suivent celle l_k, coïncident avec les verticales des foyers de droite.

Digitized by Google

Donc les z_1 sont infinis, et il en est de même des forces fictives $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$.

De plus, la distance polaire $\overline{B}_1 = \frac{\overline{O_k O'_k} \times \overline{\Pi'_k}}{\overline{P}}$, à prendre pour le tracé du polygone funiculaire des $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, est infinie, puisque $O_k O'_k$ est infini.

La construction générale de la ligne d'influence du moment fléchissant au moyen du diagramme des z_1, devient donc illusoire pour les sections des centres fixes des travées.

Il faut alors avoir recours aux forces fictives $z'_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ et à la distance polaire $\overline{z'_1} = \frac{\overline{\lambda} \times \overline{\Pi'_k}}{\overline{P}}$.

Le diagramme des z'_1 est celui représenté à la figure 23 (pl. 202). Le côté qui correspond à la travée l_k est parallèle à $A_o A_n$, puisque C'_k est rejeté à l'infini.

§ 59. — Sur quelques propriétés des lignes d'influence.

THÉORÈME. — *La ligne d'influence de l'effort tranchant, relative à une section arbitrairement choisie d'une travée l_k, présente un point d'inflexion dans chaque travée de la poutre.*

Ces points sont situés :

Dans la travée l_k, sur la verticale du centre fixe O_k de cette travée; dans les travées qui précèdent l_k, sur les verticales des foyers de gauche; dans les travées qui suivent l_k, sur les verticales des foyers de droite.

Ce théorème résulte immédiatement de ce qu'aux foyers et au centre fixe sus-indiqués, les forces fictives $\frac{z_1}{I} dx$ s'annulent en changeant de signe.

On voit de même que :

Digitized by Google

THÉORÈME II. — *La ligne d'influence du moment fléchissant en une section quelconque d'une travée l_k, présente toujours un point d'inflexion dans chacune des autres travées; ces points sont situés sur les verticales des foyers de gauche des travées qui précèdent l_k, et sur les verticales des foyers de droite des travées qui suivent l_k.*

De plus, si la section est située entre les foyers de la travée l_k, il n'y a jamais de point d'inflexion dans cette travée; si, au contraire, elle est située en dehors des foyers, il y a toujours un point d'inflexion dans la travée l_k, et ce point est situé sur la verticale du centre O'_k correspondant à la section.

EXCEPTION. — Lorsque les travées de rive reposent librement sur les appuis extrêmes, le foyer de gauche de la travée l_1 et le foyer de droite de la travée l_n coïncident respectivement avec A_0 et A_n; dans ces travées, les lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant, relatives à une section quelconque C d'une travée l_k, ne présentent pas de point d'inflexion, puisque, les diagrammes des z_1 et des z_2 ne se continuant pas à gauche de A_0 et à à droite de A_n, les efforts fictifs $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ et $z_2 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ ne changent pas de signe en ces points, — bien qu'ils s'y annulent.

§ 60. — Lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant, relatives à une section arbitrairement choisie d'une travée de rive.

Il y a lieu de distinguer suivant que la poutre continue est encastrée ou, au contraire, repose librement sur ses appuis extrêmes.

1° POUTRE CONTINUE ENCASTRÉE SUR SES APPUIS EXTRÊMES.

Dans ce cas, la méthode générale de détermination des lignes d'influence, indiquée précédemment pour une section quelconque, appartenant à une travée de rang k, s'applique sans restriction aux diverses sections des travées de rive (*).

(*) On vérifiera facilement que les lignes de fermeture des courbes funiculaires des $\frac{z_1}{I} dx$ et des $\frac{z_2}{I} dx$, menées suivant la méthode générale dans la travée qui précède (ou qui suit) celle de rang k, doivent être remplacées, quand il s'agit d'une section de la travée de rive gauche (ou droite), par les tangentes aux extrémités de gauche (ou de droite) de ces courbes.

Digitized by Google

2° Poutre continue reposant librement sur ses appuis extrêmes.

Dans cette hypothèse, la méthode générale est en défaut.

En effet, cette méthode est fondée sur la considération des déplacements élastiques que prendraient, sous l'action de la charge mobile, les extrémités (1) et (2) des deux tronçons A_0 (1) et (2) A_n obtenus en coupant la poutre suivant la section transversale relativement à laquelle on cherche les lignes d'influence (§§ 51 et 54).

Or, si on effectue cette coupure en un point C d'une travée de rive, — la travée l_n pour fixer les idées (*fig.* 25), — l'un des tron-

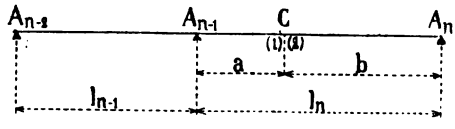


Fig. 25

çons formés, celui (2)A_n, ne possède d'autre liaison que la fixité de son extrémité A_n, ce qui est insuffisant pour en déterminer la position dans l'espace. On ne saurait, par conséquent, y appliquer la charge mobile et considérer les déplacements élastiques correspondants de son extrémité (2).

La méthode générale est donc bien en défaut.

Nous y suppléerons en déduisant les lignes d'influence cherchées, de celle du moment fléchissant M_{n-1} sur l'appui A_{n-1}.

Celle-ci se construit par la méthode générale, en considérant la section A_{n-1} comme appartenant à la travée l_{n-1}. Supposons-la tracée ; ses ordonnées représentent, non pas précisément le moment M_{n-1}, mais le quotient $\frac{M_{n-1}}{O_{n-1}A_{n-1}}$.

Soient, pour une position donnée de la charge mobile, M le moment fléchissant et T l'effort tranchant en C. Les quantités M_{n-1} M et T varient simultanément lorsque la charge se déplace.

Rendons libre la travée l_n : à cet effet, séparons-la du reste de la poutre et, à chaque instant, appliquons à sa section d'appui A_{n-1} un couple $-M_{n-1}$ égal et contraire au couple de flexion M_{n-1}.

Dès lors, quand la charge mobile se trouve sur la partie de poutre A_0A_{n-1}, la travée l_n n'est sollicitée que par un seul effort

Digitized by Google

directement appliqué, le couple $-M_{n-1}$; et on a, par conséquent,

$$(a) \qquad M = M_{n-1} \times \frac{b}{l_n}, \qquad (b) \qquad T = \frac{M_{n-1}}{l_n}$$

Quand la charge mobile P est sur la travée l_n, celle-ci est soumise aux efforts $-M_{n-1}$ et P ; on a, par suite, en vertu du principe de la superposition des effets des forces,

$$(c) \qquad M = M_{n-1} \times \frac{b}{l_n} + M', \quad (d) \qquad T = \frac{M_{n-1}}{l_n} + T',$$

en désignant par M' et T' le moment fléchissant et l'effort tranchant que produirait, en C, la charge mobile agissant sur la travée l_n supposée appuyée librement à ses extrémités.

Introduisons dans les relations précédentes, la longueur $O_{n-1}A_{n-1}$, en les écrivant comme suit :

Quand la charge mobile se trouve sur la partie de poutre $A_o A_{n-1}$:

$$(a') \qquad \frac{M}{O_{n-1}A_{n-1}} \times \frac{l_n}{b} = \frac{M_{n-1}}{O_{n-1}A_{n-1}};$$

$$(b) \qquad T \times \frac{l_n}{O_{n-1}A_{n-1}} = \frac{M_{n-1}}{O_{n-1}A_{n-1}};$$

Quand la charge mobile se trouve sur la travée l_n :

$$(c') \qquad \frac{M}{O_{n-1}A_{n-1}} \times \frac{l_n}{b} = \frac{M_{n-1}}{O_{n-1}A_{n-1}} + \frac{M'}{O_{n-1}A_{n-1}} \times \frac{l_n}{b};$$

$$(d') \qquad T \times \frac{l_n}{O_{n-1}A_{n-1}} = \frac{M_{n-1}}{O_{n-1}A_{n-1}} + T' \times \frac{l_n}{O_{n-1}A_{n-1}}.$$

Ces équations conduisent aux constructions suivantes :

1° *Ligne d'influence du moment fléchissant.* — Au lieu de considérer dans les calculs de résistance relatifs à une poutre continue, le moment fléchissant M dans une section donnée C, on peut envisager la quantité proportionnelle $\left(\frac{M}{O_{n-1}A_{n-1}} \times \frac{l_n}{b}\right)$, que nous représenterons par Λ.

C'est la ligne d'influence de Λ que nous allons construire.

On remarquera qu'au point de vue de l'homogénéité, M est du premier degré par rapport aux forces et du premier degré aussi par rapport aux longueurs, tandis que $O_{n-1}A_{n-1}$, l_n et b sont des longueurs ; Λ doit donc être regardé comme une force.

Digitized by Google

Soit (*fig.* 25, pl. 202) $a_n p a_{n-1} r a_{n-2} \ldots$, la ligne d'influence connue, de la quantité $\frac{M_{n-1}}{O_{n-1}A_{n-1}}$.

La formule (a') montre que, dans la partie de poutre $A_0 A_{n-1}$, cette ligne est précisément la ligne d'influence cherchée, qui se trouve ainsi toute tracée.

Dans la travée l_n, la ligne d'influence de Λ s'obtiendra, en vertu de (c'), par addition algébrique des ordonnées de la courbe connue $a_n p a_{n-1}$ et des ordonnées correspondantes de la ligne d'influence de la quantité $\frac{M'}{O_{n-1}A_{n-1}} \times \frac{l_n}{b}$, ligne qui se détermine comme suit :

M′ est, par définition, le moment fléchissant qui serait produit en C, par la charge mobile agissant sur la travée l_n, si celle-ci reposait librement sur ses appuis ; on sait que la ligne d'influence de ce moment fléchissant se compose de deux droites $a_{n-1}\gamma$ et $a_n\gamma$, qui se coupent sur la verticale de C en un point dont l'ordonnée $c\gamma$ a pour valeur $-\frac{Pab}{l_n}$. Par conséquent, la ligne d'influence de la quantité $\frac{M'}{O_{n-1}A_{n-1}} \times \frac{l_n}{b}$ proportionnelle à M′, se compose aussi de deux droites $a_{n-1}\theta$ et $a_n\theta$ telles que

$$c\theta = c\gamma \times \frac{1}{O_{n-1}A_{n-1}} \times \frac{l_n}{b} = -\frac{Pab}{l_n} \times \frac{1}{O_{n-1}A_{n-1}} \times \frac{l_n}{b} = -P\frac{a}{O_{n-1}A_{n-1}}$$

Si maintenant on porte $a_{n-1}\omega = O_{n-1}A_{n-1}$ et si on élève en ω une perpendiculaire $\omega\sigma$ sur $U_1U'_1$, on voit immédiatement, par la considération des triangles semblables $a_{n-1}c\theta$ et $a_{n-1}\omega\sigma$, que $\omega\sigma = -P$, à condition, bien entendu, de lire la longueur $\omega\sigma$ à l'échelle des forces.

Par conséquent, pour construire la ligne d'influence $a_{n-1}\theta a_n$ de la quantité $\frac{M'}{O_{n-1}A_{n-1}} \times \frac{l_n}{b}$, il suffit de porter $a_{n-1}\omega = O_{n-1}A_{n-1}$, d'élever en ω, une ordonnée $\omega\sigma$ représentant $-P$ à l'échelle des forces, de tirer $a_{n-1}\sigma$, de prendre l'intersection θ de cette ligne avec la verticale de C et enfin de mener $a_n\theta$.

De ce qui précède, il résulte qu'en un point quelconque m de la travée de rive l_n, l'ordonnée de la ligne d'influence de Λ est

Digitized by Google

égale à la somme algébrique $mp + ms$, dont les deux termes sont à présent connus.

Pratiquement, au lieu de construire le diagramme $a_{n-1}\theta\, a_n$, on en construira le symétrique $a_{n-1}\theta' a_n$ par rapport à U_1U_1'; de sorte qu'en tout point m on aura $s'p = mp - ms' = mp + ms$; et les segments de verticales compris entre le diagramme $a_{n-1}\theta' a_n$ et la courbe $a_{n-1}p\ a_n$ seront, par conséquent, égaux aux ordonnées correspondantes de la ligne d'influence de la quantité Λ.

On ramènera ces segments de verticales à avoir leurs pieds, tels que s', sur l'axe U_1U_1'; le lieu de leurs extrémités sera la ligne d'influence cherchée.

Remarque I. — Lorsque la section C considérée décrit la travée l_n, la courbe $a_n p\ a_{n-1} r\ a_{n-2}$.... ne change pas, il en est de même de la droite $a_{n-1}\sigma'$; la droite $a_n\theta'$ seule se déplace en pivotant autour de a_n.

La courbe en question et la droite $a_{n-1}\sigma'$, tracées une fois pour toutes, font donc connaître immédiatement les lignes d'influence de la quantité Λ, relatives aux différentes sections de la travée de rive.

Ainsi, pour une section C_1 par exemple *(fig. 24, pl. 202)*, la ligne d'influence de la quantité y relative $\Lambda_1 = \dfrac{M_1}{O_{n-1}A_{n-1}} \times \dfrac{l_n}{b_1}$ se composera, dans la partie de poutre $A_{n-1}A_0$, de la courbe $a_{n-1} r\, a_{n-2}$..... *(fig. 25)*.

Quant à la partie de cette ligne d'influence située dans la travée l_n, il suffira, pour en obtenir les ordonnées, de prendre le point d'intersection θ_1' de la verticale de C_1 avec la droite fixe $a_{n-1}\sigma'$ et de joindre $a_n\theta_1'$: les segments de verticales compris entre le diagramme $a_n\theta_1' a_{n-1}$ ainsi formé et la courbe $a_n p\, a_{n-1}$, seront les ordonnées cherchées. On pourra, si on le veut, rapporter ces ordonnées à l'axe U_1U_1'.

Remarque II. — Il résulte des constructions indiquées précédemment que si la section C vient en A_n, la ligne d'influence de la quantité $\Lambda = \dfrac{M}{O_{n-1}A_{n-1}} \times \dfrac{l_n}{b}$ reste déterminée; mais alors $b = o$, et par suite, $M = o$. Les ordonnées de la ligne d'influence du moment fléchissant en A_n sont donc nulles, d'aprés les tracés, comme cela doit être d'ailleurs.

Digitized by Google

2° *Ligne d'influence de l'effort tranchant.* — Par analogie avec ce que nous avons fait pour le moment fléchissant, au lieu de considérer l'effort tranchant T en la section C donnée, nous considérerons la quantité proportionnelle $T\frac{l_n}{O_{n-1}A_{n-1}}$, que nous représenterons par Θ.

On remarquera que, l_n et $O_{n-1}A_{n-1}$ étant des longueurs et T une force, Θ doit être regardé comme une force.

Soit, comme précédemment (*fig.* 26, pl. 202), $a_n p\, a_{n-1} r a_{n-2}\ldots\ldots$ la ligne d'influence connue, de la quantité $\frac{M_{n-1}}{O_{n-1}A_{n-1}}$.

La formule (b') montre que, dans la partie de poutre $A_o A_{n-1}$, cette ligne est précisément la ligne d'influence de la quantité Θ, qui se trouve ainsi toute tracée.

Dans la travée l_n, la ligne d'influence de Θ est, en vertu de (d'), la somme algébrique des ordonnées de la courbe connue $a_n p\, a_{n-1}$ et des ordonnées correspondantes de la ligne d'influence de la quantité $T'\frac{l_n}{O_{n-1}A_{n-1}}$, ligne qui se détermine comme suit :

T′ est l'effort tranchant qui serait produit en C, par la charge mobile agissant sur la travée l_n, si celle-ci reposait librement sur ses appuis; on sait que la ligne d'influence de cet effort tranchant se compose de deux droites parallèles $a_{n-1}\rho$ et $a_n\lambda$, limitées à la verticale de C et dont les prolongements déterminent sur les verticales de A_n et de A_{n-1} deux longueurs $a_n\tau_n$ et $a_{n-1}\tau_{n-1}$ représentant, en valeur absolue, le poids P à l'échelle des forces. Par conséquent, la ligne d'influence de la quantité $T'\frac{l_n}{O_{n-1}A_{n-1}}$ proportionnelle à T′ se compose aussi de deux droites parallèles $a_{n-1}\theta$ et $a_n\delta$, dont les prolongements rencontrent les verticales des appuis A_n et A_{n-1} en deux points ε_n et ε_{n-1}, tels que l'on ait, en tenant compte des signes conventionnels des ordonnées,

$$a_n\varepsilon_n = -a_{n-1}\varepsilon_{n-1} = -P\frac{l_n}{O_{n-1}A_{n-1}}.$$

Si maintenant on porte $a_{n-1}\omega = O_{n-1}A_{n-1}$ et si on élève en ω une perpendiculaire $\omega\sigma$ sur U_2U_2', on voit par la considération des triangles semblables $a_{n-1}a_n\varepsilon_n$ et $a_{n-1}\omega\sigma$ que

$$\omega\sigma = -P,$$

la longueur $\omega\sigma$ étant lue à l'échelle des forces.

Digitized by Google

La droite $a_{n-1}\theta$ de la figure 26 est donc la même que celle $a_{n-1}\theta$ de la figure 25; la droite $a_n\delta$ lui est parallèle.

Cela posé, on voit qu'en tout point m de la travée de rive l_n, situé à gauche de C, l'ordonnée de la ligne d'influence de Θ est égale à la somme algébrique $mp + ms$, et qu'en tout point m_1 situé à droite de C, l'ordonnée en question est égale à la somme algébrique $m_1p_1 + m_1s_1$.

Pratiquement, au lieu de construire le diagramme $a_{n-1}\theta\delta a_n$, on en construira le symétrique $a_{n-1}\theta'\delta' a_n$ par rapport à $U_2U'_2$, de sorte que les segments de verticales compris entre ce second diagramme et la courbe $a_{n-1}pa_n$ seront égaux aux ordonnées correspondantes de la ligne d'influence de la quantité Θ.

On ramènera les segments de verticales à avoir leurs pieds tels que s' et s'_1, sur l'axe $U_2U'_2$; le lieu de leurs extrémités sera la ligne d'influence cherchée.

Remarque. — La courbe $a_npa_{n-1}ra_{n-2}\ldots$ et les droites $a_{n-1}\varepsilon'_n$ et $a_n\varepsilon'_{n-1}$ sont indépendantes de la position de la section C dans la travée de rive. Elles font donc connaître les lignes d'influence de la quantité Θ relatives aux différentes sections de cette travée.

§ 61. — Lignes d'influence des réactions des appuis.

On pourrait déterminer directement les lignes d'influence des réactions des appuis, mais il est aussi simple de les déduire des lignes d'influence des efforts tranchants.

Soient, pour une position quelconque de la charge mobile, V_k la réaction de l'appui A_k, T_k l'effort tranchant dans la section située immédiatement à gauche de A_k, et T'_k l'effort tranchant dans la section située immédiatement à droite, on a

$$T_k = T'_k + V_k$$

d'où

$$V_k = T_k - T'_k.$$

Donc :

Les ordonnées de la ligne d'influence de la réaction d'un appui A_k s'obtiendront par différence entre les ordonnées de la ligne d'influence de l'effort tranchant T_k et les ordonnées correspondantes de la ligne d'influence de l'effort tranchant T'_k.

Digitized by Google

§ 62. — Cas particulier où la poutre continue est de section constante.

Ce cas particulier est caractérisé par la relation

(1) $$I = I_m = \text{constante}.$$

L'introduction de cette condition dans la méthode générale conduit à quelques simplifications que nous allons indiquer brièvement.

Les formules (*b*) et (*b'*) du § 50 montrent que les points trisecteurs divisent alors les travées en trois parties égales.

D'autre part, la formule (*a'*) du même paragraphe donne, pour valeur de la résultante trisectrice de gauche d'une travée de rang k quelconque,

$$\psi'_k = \frac{l_k^2}{2I}.$$

Par suite, la composante au foyer de gauche de la même travée [§ 50, formule (*e'*)] a pour valeur

(2) $$\pi'_k = \frac{A_{k-1} g'_k \times \psi'_k}{u'_k} = \frac{l_k^2}{6 I u'_k}.$$

Quant aux forces fictives $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ et $z_2 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, considérées au § 56 pour le tracé des polygones funiculaires qui font connaître les lignes d'influence de M et de T en une section donnée, elles prennent les valeurs simples $z_1 \frac{1}{n}$ et $z_2 \frac{1}{n}$.

K_1H_1 et K_2H_2 désignant toujours les segments de verticales compris entre ces polygones funiculaires et leurs lignes de fermeture convenablement menées, on a, comme au § 56 (p. 119),

$$\frac{M_c}{O_k A_k} = P \times \frac{\frac{n \Delta x}{I_m} \times B_1}{O_k O'_k \times \pi'_k} \times K_1 H_1,$$

$$T_c = P \times \frac{\frac{n \Delta x}{I_m} \times B_2}{O_k F'_k \times \pi'_k} \times K_2 H_2.$$

Ou, à cause de (1) et de (2),

$$\frac{M_c}{O_k A_k} = \frac{6 n \Delta x u'_k P \times B_1}{O_k O'_k \times l_k^2} \times K_1 H$$

$$T = \frac{6 n \Delta x u'_k P \times B_2}{O_k F'_k \times l_k^2} \times K_2 H_2.$$

Digitized by Google

En remplaçant, comme au § 56, les quantités qui entrent dans ces formules par leurs expressions en fonction des longueurs brutes qui les représentent sur l'épure et des valeurs des échelles adoptées, il vient

$$\frac{M_c}{O_kA_k} = \frac{6n\,\overline{\Delta x}\,\overline{u'_k}\,\overline{P} \times \overline{B_1}}{\overline{O_kO'_k} \times \overline{l_k}^2} \times \overline{K_1H_1} \times f,$$

$$T_c = \frac{6n\,\overline{\Delta x}\,\overline{u'_k}\,\overline{P} \times \overline{B_2}}{\overline{O_kF'_k} \times \overline{l_k}^2} \times \overline{K_2H_2} \times f.$$

Ces relations montrent que pour que les segments $\overline{K_1H_1}$ et $\overline{K_2H_2}$ représentent $\frac{M_c}{O_kA_k}$ et T_c à l'échelle des forces, c'est-à-dire soient égaux aux ordonnées des lignes d'influence cherchées, il suffit de prendre des distances polaires égales à

$$(3) \qquad \overline{B_1} = \frac{\overline{O_kO'_k} \times \overline{l_k}^2}{6n\,\overline{\Delta x}\,\overline{u'_k}\,\overline{P}}, \qquad \overline{B_2} = \frac{\overline{O_kF'_k} \times \overline{l_k}^2}{6n\,\overline{\Delta x}\,\overline{u'_k}\,\overline{P}}.$$

Remarque. — *Dans une poutre continue de section constante, les lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant se composent de branches de paraboles du troisième degré.* (*)

Cette proposition résulte immédiatement de ce que, I étant constant, les intensités des forces fictives $\frac{z_1}{I}\,dx$ et $\frac{z_2}{I}\,dx$ sont des fonctions linéaires des abscisses des points d'application de ces forces.

§ 63. — Poutre à une seule travée, encastrée horizontalement à ses extrémités.

Lemme. — *La poutre à une seule travée, encastrée horizontalement à ses deux extrémités, peut être considérée comme la forme limite d'une poutre continue horizontale à trois travées dont les longueurs des travées de rive tendent vers zéro.*

Soit une poutre à trois travées $A_{-1}A_0A_1A_2$ *(fig. 26, p. 142)*.

Imaginons que les deux points d'appuis extrêmes A_{-1} et A_2 se rapprochent indéfiniment des points d'appuis intermédiaires A_0 et A_1. A la limite, la ligne moyenne de la poutre a deux points confondus en A_0 et deux points confondus en A_1 avec l'horizontale A_0A_1 ; autrement dit, elle est tangente en A_0 et en A_1 avec cette droite. La poutre satisfait dès lors à la définition de la poutre encastrée, ce qui justifie la proposition énoncée.

(*) Dans le cas particulier où la section considérée coïncide avec le centre fixe de la travée, les deux branches de parabole qui constituent la partie de la ligne d'influence du moment fléchissant comprise dans cette travée, sont du second degré seulement.

Digitized by Google

Ce lemme nous autorise à appliquer à la poutre encastrée les théorèmes démontrés pour la poutre continue, en introduisant dans ces théorèmes la condition caractéristique

$$\textit{limite de } l_0 = \textit{limite de } l_2 = 0 \ (^*).$$

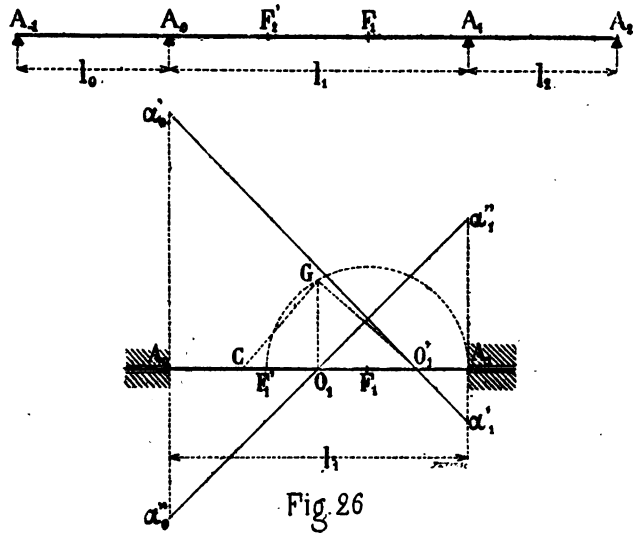


Fig. 26

Foyers. — Cherchons d'abord la position du foyer de gauche de la poutre encastrée. A cet effet, appliquons la formule 3 *bis* du § 50 aux deux travées l_0 et l_1 de la poutre continue $A_{-1}A_2$, en accentuant les lettres u et v, puisqu'il s'agit des foyers de gauche, et en tenant compte de ce que $v'_0 = l_0$, puisque le foyer de gauche de la travée de rive l_0 coïncide avec l'appui A_{-1} ; il vient

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{l_0^2}\displaystyle\int_0^{l_0} \frac{(l_0 - x)x\,dx}{EI} + \frac{1}{u'_1 l_1}\int_0^{l_1} \frac{x(l_1 - x)\,dx}{EI} \\ = \dfrac{1}{l_0}\displaystyle\int_0^{l_0} \frac{x\,dx}{EI} + \frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} \frac{(l_1 - x)\,dx}{EI}. \end{cases}$$

Pour passer de la poutre continue à la poutre encastrée, il faut faire tendre l_0 vers zéro ; la valeur de u'_1 correspondante déterminera le foyer de gauche F'_1 de la poutre encastrée A_0A_1.

(*) La théorie de la poutre droite encastrée peut également se déduire de celle de l'arc encastré, exposée au chapitre II.

Digitized by Google

Si on fait $l_0 = 0$ dans l'équation (1), le premier terme du premier membre et le premier terme du second se présentent sous la forme illusoire $\frac{0}{0}$. Levons ces indéterminations en appliquant la règle de L'Hospital.

Pour le calcul du premier terme du premier membre, on a successivement

$$(2)\qquad \frac{d\int_0^{l_0}\frac{(l_0-x)x\,dx}{EI}}{dl_0} = \left(\frac{(l_0-x)x}{EI}\right)_{x=l_0} + \int_0^{l_0}\frac{x\,dx}{EI} = \int_0^{l_0}\frac{x\,dx}{EI},$$

$$(3)\qquad \frac{d(l_0^2)}{dl_0} = 2l_0.$$

Pour $l_0 = 0$, les dérivées premières (2) et (3) s'annulent, en sorte que leur quotient se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Formons donc les dérivées secondes ; il vient

$$\frac{d^2\int_0^{l_0}\frac{(l_0-x)x\,dx}{EI}}{dl_0^2} = \left(\frac{x}{EI}\right)_{x=l_0} = \frac{l_0}{EI},$$

$$\frac{d^2(l_0^2)}{dl_0^2} = 2.$$

La vraie valeur du premier terme du premier membre de (1) est par conséquent

$$\left(\frac{l_0}{EI}\right)_{l_0=0} : 2 = 0.$$

Un calcul analogue au précédent montrerait que le premier terme du second membre est également nul.

Dès lors, l'équation (1) résolue par rapport à u_1' donne, en supprimant le coefficient d'élasticité constant E,

$$(4)\qquad u_1' = \frac{\int_0^{l_1}\frac{x\,(l_1-x)\,dx}{I}}{\int_0^{l_1}\frac{(l_1-x)\,dx}{I}}.$$

Digitized by Google

Cette expression est précisément celle de l'abscisse du point trisecteur de gauche de la travée l_1 [§ 50, formule *(b')*]. Donc

Le foyer de gauche de la poutre encastrée coïncide avec le point trisecteur de gauche.

De même :

Le foyer de droite coïncide avec le point trisecteur de droite.

COMPOSANTE AU FOYER DE GAUCHE. — Le foyer de gauche coïncidant avec le point trisecteur de gauche, la composante au foyer de gauche est égale à la résultante trisectrice de gauche ; en sorte que

$$\pi'_1 = \psi'_1 = \int_0^{l_1} \frac{l_1 - x}{I}\, dx. \tag{5}$$

CENTRE FIXE O_1 ET CENTRE O'_1 CORRESPONDANT A UNE SECTION C DONNÉE. — Ces points satisfont aux théorèmes I et II du § 52 qui en déterminent la position.

DIAGRAMMES DES z_1 ET DES z_2. — Ces diagrammes se réduisent à deux droites $\alpha'_0\alpha'_1$ et $\alpha''_0\alpha''_1$ *(fig. 26)*, faisant avec A_0A_1 un angle de 45° dans le sens indiqué au § 54 et passant respectivement par O'_1 et par O_1.

THÉORÈMES RELATIFS AUX LIGNES D'INFLUENCE. — Examinons ce que devient le théorème II du § 54.

Quand les longueurs des travées de rive $A_{-1}A_0$ et A_1A_2 adjacentes à celle A_0A_1, tendent vers zéro, les lignes de fermeture menées dans ces travées aux courbes funiculaires des $\frac{z_1}{I}dx$ et des $\frac{z_2}{I}dx$ ont à la limite deux points confondus avec ces courbes, aux extrémités desquelles elles sont alors tangentes.

Donc :

Étant données une poutre A_0A_1 encastrée horizontalement à ses deux extrémités, parcourue par une charge mobile, et une section C arbitrairement choisie, si on applique successivement des efforts fictifs verticaux 1° $\frac{z_1}{I}dx$, 2° $\frac{z_2}{I}dx$, *tout le long de la poutre, — z_1 et z_2 étant les ordonnées des droites $\alpha'_0\alpha'_1$ et $\alpha''_0\alpha''_1$, précédemment définies, — qu'avec des distances arbitraires polaires on construise les deux courbes funulaires*

Digitized by Google

respectivement relatives à ces efforts, qu'on mène les tangentes aux extrémités de ces courbes et qu'on limite ces tangentes à la verticale de la section C :

Les segments de verticales compris entre chacune de ces courbes et les tangentes y relatives sont respectivement proportionnels aux ordonnées des lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant développés dans la section C.

On voit immédiatement que les théorèmes I et II du § 55 prennent la forme suivante dans le cas de la poutre encastrée :

1° *Les tangentes aux extrémités de la courbe funiculaire des* $\frac{z_1}{I}\,dx$ *se coupent sur la verticale de la section* C.

2° *Les tangentes aux extrémités de la courbe funiculaire des* $\frac{z_2}{I}\,dx$ *sont parallèles.*

CONSTRUCTION DES LIGNES D'INFLUENCE. — La construction des lignes d'influence s'effectuera conformément aux indications du § 56.

Toutefois, les lignes de fermeture des polygones funiculaires des forces fictives $z_1 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ et $z_2 \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ seront remplacées par les prolongements des côtés extrêmes de ces polygones, ainsi qu'il résulte des deux théorèmes qui précèdent.

Les distances polaires à adopter sont, en vertu des formules *(a)* et *(b)* du § 56,

$$(6) \qquad \overline{B_1} = \frac{\overline{O_1 O_1'} \times \overline{\Psi_1'}}{\overline{P}} \quad \text{et} \quad \overline{B_2} = \frac{\overline{O_1 F_1'} \times \overline{\Psi_1'}}{\overline{P}},$$

puisque, pour la poutre encastrée, $\pi_1' = \psi_1'$ et que par suite $\Pi_1' = \Psi$

CAS PARTICULIER OU LA POUTRE EST DE SECTION CONSTANTE.

Les foyers qui coïncident avec les points trisecteurs divisent alors la poutre en trois parties égales. Par suite, le centre fixe O_1 est au milieu de la portée, puisqu'il divise dans le même rapport la longueur l_1 de la travée et la distance focale *(fig. 27, p. 146)*.

La relation anharmonique (l') du § 52

$$\frac{O_k' F_k}{O_k' F_k'} \times \frac{O_k F_k'}{O_k F_k} = \frac{CA_{k-1}}{CA_k}$$

Digitized by Google

se réduit ici à

$$\frac{O_1'F_1}{O_1'F_1'} = -\frac{CA_0}{CA_1},$$

puisque

$$O_1F_1' = -O_1F_1.$$

Cette proportion peut s'écrire, d'après la figure,

$$\frac{O_1'O_1 + O_1F_1}{O_1'O_1 + O_1F_1'} = \frac{-(CO_1 + O_1A_0)}{CO_1 + O_1A_1};$$

mais

$$O_1F_1 = -O_1F_1' = \frac{l_1}{6}, \qquad -O_1A_0 = O_1A_1 = \frac{l_1}{2};$$

donc

$$\frac{O_1'O_1 + \frac{l_1}{6}}{O_1'O_1 - \frac{l_1}{6}} = \frac{-CO_1 + \frac{l_1}{2}}{CO_1 + \frac{l_1}{2}};$$

d'où l'on tire

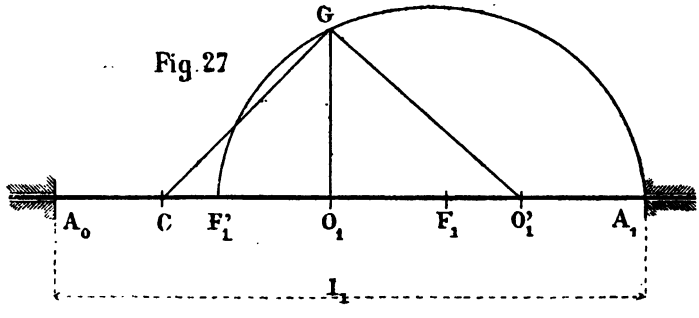
$$O_1'O_1 \times CO_1 = -\frac{l_1^2}{12},$$

ou

$$CO_1 \times O_1O_1' = \frac{l_1^2}{12}. \tag{7}$$

Cette formule conduit à une construction très simple du centre O_1' correspondant à la section C *(fig. 27)* :

Fig. 27



De F_1 comme centre, avec un rayon égal à $F_1'F_1 = F_1A_1 = \frac{1}{3}$, décrivons une demi-circonférence qui coupe en un point G la verticale du centre fixe O_1. On a

$$(O_1G)^2 = F_1'O_1 \times O_1A_1 = \frac{l_1}{6} \times \frac{l_1}{2} = \frac{l_1^2}{12}$$

Digitized by Google

L'équation (7) devient donc

$$CO_1 \times O_1O_1' = (O_1G)^2.$$

Il en résulte que, pour déterminer le centre O_1' correspondant à une section C, il suffit de joindre CG et de mener à cette droite une perpendiculaire en G, qui coupe A_0A_1 au point O_1' cherché.

Les forces fictives à considérer pour la construction des lignes d'influence ont pour valeurs $\frac{1}{n}z_1$ et $\frac{1}{n}z_2$, comme dans le cas de la poutre continue de section constante; et les distances polaires à adopter ont pour valeurs, en vertu des formules (3) du § 62,

$$\overline{B_1} = \frac{\overline{O_1O'} \times \overline{l_1^2}}{2n\overline{\Delta x}\overline{P}} \quad \text{et} \quad \overline{B_2} = -\frac{\overline{l_1^3}}{12n\overline{\Delta x}\overline{P}},$$

puisque dans la poutre encastrée

$$u_1' = \frac{l_1}{3} \quad \text{et} \quad O_1F_1' = -\frac{l_1}{6}.$$

Digitized by Google

Note I

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS RELATIVES A L'ARC ENCASTRÉ A SES DEUX EXTRÉMITÉS

Propriétés des droites qui joignent les centres.

1. — Théorème. — *La fibre moyenne de l'arc étant considérée comme une ligne matérielle dont le poids rapporté à l'unité de longueur serait, en chaque point, égal à* $\frac{1}{I}$, *si le point* C *décrit cette ligne en entraînant d'un mouvement de translation deux axes rectangulaires quelconques* Cx *et* Cy :

1° *Les droites fixes* $o'o''$ *et* $o'o'''$ *correspondant à ces directions d'axes* (§ 46. — Théorème I), *sont les diamètres respectivement conjugués aux cordes parallèles à l'axe des* x *et aux cordes parallèles à l'axe des* y, *par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de la fibre moyenne ;*

2° *La droite mobile* $o''o'''$ *est constamment l'antipolaire du point mobile* C, *par rapport à la dite ellipse, à condition toutefois de prendre pour longueurs du grand axe et du petit axe de celle-ci, les rayons de giration principaux de la fibre moyenne.*

Soient u' et v' les coordonnées courantes des trois droites $o'o''$, $o'o'''$ et $o''o'''$, par rapport à deux axes $o'x'$ et $o'y'$ parallèles à Cx et à Cy (pl. 200, *fig. 3*). (Nous réservons les notations x' et y' pour désigner les coordonnées d'un point quelconque de la ligne moyenne par rapport à ces mêmes axes.)

(γ'', δ''), (γ''', δ''') désignant, comme au § 46, les coordonnées des centres o'' et o''' relativement à $o'x'$ et $o'y'$, les équations des droites dont il s'agit sont les suivantes :

$$(o'o'') \quad \frac{v'}{u'} = \frac{\delta''}{\gamma''},$$

$$(o'o''') \quad \frac{v'}{u'} = \frac{\delta'''}{\gamma'''},$$

$$(o''o''') \quad \frac{v' - \delta''}{u' - \gamma''} = \frac{\delta''' - \delta''}{\gamma''' - \gamma''},$$

Remplaçons γ'', δ'', γ''', δ''', par leurs valeurs (*d*) du § 46 (p. 56); il vient :

$$(1) \quad (o'o'') \quad B'^2 u' - C'^2 v' = 0,$$

$$(2) \quad (o'o''') \quad C'^2 u' - A'^2 v' = 0,$$

$$(3) \quad (o''o''') \quad u'(B'^2 c' - C'^2 d') + v'(A'^2 d' - C'^2 c') + C'^4 - A'^2 B'^2 = 0.$$

où :

$$(4) \quad A'^2 = \frac{\int_A^B \frac{x'^2}{I}\, ds}{\int_A^B \frac{ds}{I}}, \quad B'^2 = \frac{\int_A^B \frac{y'^2}{I}\, ds}{\int_A^B \frac{ds}{I}}, \quad C'^2 = \frac{\int_A^B \frac{x'y'}{I}\, ds}{\int_A^B \frac{ds}{I}}$$

Digitized by Google

Cela posé, d'après la théorie des coniques d'inertie, l'équation de l'ellipse centrale de la fibre moyenne considérée comme ligne pesante, est, relativement aux axes rectangulaires $o'x'$, $o'y'$ qui passent par le centre de gravité o' de cette ligne,

$$(5) \qquad f(u',v') = B'^2u'^2 + A'^2v'^2 - 2C'^2u'v' - D'^4 = 0,$$

où A'^2, B'^2, C'^2 sont des constantes ayant les valeurs indiquées ci-dessus.

A' et B' sont les rayons de giration de la ligne moyenne pesante respectivement autour des axes $o'y'$ et $o'x'$.

D' est une constante arbitraire dont nous fixerons plus tard la valeur.

Cette ellipse, rapportée à ses axes de symétrie, c'est-à-dire aux axes principaux d'inertie que nous désignerons par $o'u$ et $o'v$, a pour équation

$$(6) \qquad f(u,v) = B^2u^2 + A^2v^2 - D'^4 = 0,$$

où A et B sont les rayons de giration principaux et où D'^4 a la même valeur que ci-dessus.

A et B sont liés à A', B' et C' par la relation

$$C'^4 - A'^2B'^2 = -A^2B^2,$$

puisque la quantité caractéristique d'une courbe du second ordre est un invariant.

Ainsi qu'il est d'usage, attribuons à la constante arbitraire D'^4 la valeur

$$D'^4 = A^2B^2 = A'^2B'^2 - C'^4;$$

les équations (5) et (6) de l'ellipse d'inertie deviennent

$$(5\ bis) \quad f(u',v') = B'^2u'^2 + A'^2v'^2 - 2C'^2u'v' + C'^4 - A'^2B'^2,$$

$$(6\ bis) \qquad f(u,v) = B'^2u^2 + A^2v^2 - A^2B^2 = 0,$$

et les longueurs des demi-axes de symétrie de l'ellipse centrale sont alors égales aux rayons de giration principaux A et B.

L'équation du diamètre de l'ellipse (5 *bis*), conjugué aux cordes parallèles à $o'x'$ est

$$(7) \qquad \frac{1}{2}f'_u = 0, \quad \text{ou} \quad B'^2u' - C'^2v' = 0.$$

Celle du diamètre conjugué aux cordes parallèles à $o'y'$ est

$$(8) \qquad \frac{1}{2}f'_v = 0, \quad \text{ou} \quad A'^2v' - C'^2u' = 0.$$

Ces équations sont précisément celles (1) et (2) des droites ($o'o''$) et $o\,o'''$), ce qui démontre la première partie du théorème.

L'équation de la polaire d'un point quelconque $(u'_1v'_1)$ par rapport à l'ellipse (5 *bis*), est, en coordonnées homogènes,

$$\frac{1}{2}u'f'_{u'_1} + \frac{1}{2}v'f'_{v'_1} + \frac{1}{2}t'f'_{t'_1} = 0,$$

dans laquelle $t' = t'_1 = 1$;

ou

$$u'(B'^2u'_1 - C'^2v'_1) + v'(A'^2v'_1 - C'^2u'_1) + C'^4 - A'^2B'^2 = 0.$$

L'antipolaire du point (u'_1, v'_1) étant la droite symétrique de la polaire par rapport au centre o' de l'ellipse, son équation est

$$(9) \quad u'(B'^2u'_1 - C'^2v'_1) + v'(A'^2v'_1 - C'^2u'_1) - (C'^4 - A'^2B'^2) = 0$$

Digitized by Google

Les coordonnées du point o' sont c' et d' par rapport aux axes Cx et Cy ; celles du point C par rapport aux axes $o'x'$ et $o'y'$, sont donc égales à $(-c')$ et $(-d')$; substituant ces dernières coordonnées à celles u'_1 et v'_1 dans (9), il vient, pour équation de l'antipolaire de C,

$$u'(B'^2c' - C'^2d') + v'(A'^2d' - C'^2c') + C'^4 - A'^2B'^2 = 0.$$

Cette équation est précisément celle de $o''o'''$, ce qui justifie le 2° du théorème.

On peut encore énoncer le théorème qui précède sous la forme suivante :

Les droites $o'o''$, $o'o'''$ et $o''o'''$ sont respectivement les antipolaires 1° du point à l'infini de Cx, 2° du point à l'infini de Cy, 3° du point C, *par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de la fibre moyenne.*

En effet $o'o''$, par exemple, étant le diamètre conjugué aux cordes parallèles à Cx, par rapport à l'ellipse centrale, peut être regardé comme l'antipolaire du point à l'infini de Cx.

Corollaire I. — *Les centres o'' et o''' sont respectivement les antipôles des axes Cx et Cy par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de la fibre moyenne.*

Le point o'', par exemple, est bien l'antipôle de Cx, puisqu'il appartient à la fois à $o'o''$, qui est l'antipolaire du point à l'infini de la droite Cx, et à $o''o'''$ qui est l'antipolaire du point C de cette même droite.

Corollaire II. — *Lorsque le point* C *décrit la ligne moyenne de l'arc, la droite mobile $o''o'''$ enveloppe la courbe antipolaire réciproque de ladite ligne moyenne par rapport à l'ellipse centrale d'inertie.*

Remarque. — *Si la ligne moyenne est une branche de conique* (ellipse, cercle, hyperbole, parabole), *l'enveloppe de la droite mobile $o''o'''$ est une ellipse.*

On sait, en effet, que la polaire réciproque d'une conique S, par rapport à une conique Σ, est une autre conique S', laquelle est une ellipse lorsque le centre de la conique Σ est situé à l'intérieur de la conique S. Il en est de même de l'antipolaire réciproque, qui est la courbe symétrique de la polaire réciproque S' par rapport au centre de la conique Σ.

Ici, la conique S est la ligne moyenne de l'arc ; la conique Σ est l'ellipse centrale d'inertie dont le centre est toujours situé à l'intérieur de la ligne moyenne.

Théorème relatif à la droite *(c)* utilisée au § 48 pour la détermination de la ligne d'influence de la tension élastique par unité de surface développée en un point donné d'une fibre arbitrairement choisie.

2. Définition. — Soient : C le centre de gravité d'une section normale quelconque (Pl. 200, *fig. 3*) ; F l'intersection de la fibre considérée avec cette section ; v la distance CF, positive si F est au-dessous de C, négative

Digitized by Google

dans le cas contraire ; ρ le rayon de giration de la section autour d'un axe horizontal passant par C.

Construisons un point J tel que

$$CF \times CJ = -\rho^2 ;$$

ou, en représentant par t la distance CJ, qui sera regardée comme positive ou comme négative suivant que J sera au-dessous ou au-dessus de C,

$$v \times t = -\rho^2. \tag{10}$$

On voit que J n'est autre chose que le *transformé du point* F *par rayons vecteurs réciproques*, le point C étant le pôle de transformation.

Nous appellerons le point J *point réciproque de* F.

Pour le déterminer géométriquement, il suffit de porter sur la tangente en C à la ligne moyenne $C\theta = \rho$, de joindre $F\theta$ et de mener par θ une perpendiculaire à $F\theta$, laquelle rencontre FC au point J cherché. (*)

THÉORÈME. — *La droite (c) utilisée au* § 48 *pour la détermination de la ligne d'influence de la tension élastique par unité de surface développée en un point* F *quelconque d'une fibre donnée, est l'antipolaire du point réciproque de* F, *par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de la fibre moyenne.*

L'équation de la droite *(c)*, ou *ts* (*fig. 3* — Pl. 200), rapportée aux axes Cx et Cy, est (§ 48)

$$(c) \quad Z = \frac{\dfrac{vb}{\rho} \times \dfrac{1}{(o'q')\varphi'}\, z' - \cos\alpha \dfrac{1}{(o''q'')\varphi''}\, z'' + \sin\alpha \dfrac{1}{(o'''q''')\varphi'''}\, z'''}{\dfrac{vb}{\rho^2} \times \dfrac{1}{(o'q')\varphi'} - \cos\alpha \dfrac{1}{(o''q'')\varphi''} + \sin\alpha \dfrac{1}{(o'''q''')\varphi'''}}$$

Transformons-la, en y remplaçant les produits $(o'q')\varphi'$, $(o''q'')\varphi''$, $o'''q''')\varphi'''$, par leurs valeurs en fonction des paramètres A'^2, B'^2, C'^2 de l'ellipse centrale d'inertie de la ligne moyenne.

Le second et le troisième produits sont donnés par les formules *(k)* du § 46 (page 59), savoir :

$$(o''q'')\varphi'' = \left(-B'^2 + \frac{C'^4}{A'^2}\right)\int_A^B \frac{ds}{I}, \quad (o'''q''')\varphi''' = \left(-C'^2 + \frac{A'^2B'^2}{C'^2}\right)\int_A^B \frac{ds}{I}. \tag{11}$$

D'autre part, on a [§ 37, page 25, formule *(e)*]

$$\varphi' = \int_A^B \frac{bds}{I}; \tag{12}$$

de plus, $o'q'$ est l'ordonnée à l'origine de la droite $o''o'''$ rapportée aux axes $o'x'$ et $o'y'$, droite qui est représentée par l'équation (3) *(n° 1)* ; cette équation donne

$$o'q' = \frac{A'^2B'^2 - C'^4}{A'^2d' - C'^2c'}. \tag{13}$$

Portons ces valeurs (11), (12) et (13) dans l'équation de la droite *(c)*

(*) La construction n'est pas indiquée sur la figure 3—Pl. 200.

Digitized by Google

vient en supprimant les facteurs communs $\int_A^B \frac{ds}{I}$ et $A'^2B'^2 - C'^4$, et en remplaçant $\frac{v}{\rho^2}$ par sa valeur $-\frac{1}{t}$ tirée de (10),

$$(c') \quad Z = \frac{-(A'^2d' - C'^2c')\,z' + A'^2t\cos\alpha\,z'' + C'^2t\sin\alpha\,z'''}{-(A'^2d' - C'^2c') + A'^2t\cos\alpha + C'^2t\sin\alpha}.$$

Cherchons maintenant ce que devient l'équation de la droite *(c)* quand on la rapporte aux deux axes $o'x'$, $o'y'$ parallèles à Cx et à Cy et passant par le centre fixe o'.

Soit V' une ordonnée quelconque de la droite *(c)* relativement à ces nouveaux axes, on a

$$Z = V' + d',$$

puisque d' est l'ordonnée du centre o' par rapport aux anciens axes Cx et Cy.

D'autre part z' désigne une ordonnée quelconque de la droite $o''o'''$ relativement aux axes Cx et Cy, tandis que nous avons désigné *(n° 1)* par u' et v' les coordonnées d'un point quelconque de cette droite relativement aux axes $o'x$ et $o'y$. On a donc

$$z' = v' + d',$$

ou, en tirant v' de l'équation (3) de $o''o'''$ *(n° 1)*,

$$z' = \frac{(A'^2B'^2 - C'^4) - (B'^2c' - C'^2d')\,u'}{A'^2d'^2 - C'^2c'} + d.$$

De même z'' désigne une ordonnée quelconque de la droite $o'o'''$ relativement aux axes Cx et Cy ; en effectuant la même transformation que pour z', il vient, en tenant compte de l'équation (2) de $o'o'''$,

$$z'' = \frac{C'^2}{A'^2}\,u' + d'.$$

Enfin, on trouve également, en utilisant l'équation (1) de $o'o''$,

$$z''' = \frac{B'^2}{C'^2}\,u' + d'.$$

Substituant les valeurs ci-dessus de Z, z', z'' et z''' dans l'équation *(c')*, il vient, après réductions,

$$(c'') \quad V' = \frac{[-B'^2(c' + t\sin\alpha) + C'^2(d' - t\cos\alpha)]\,u' + A'^2B'^2 - C'^4}{A'^2(d' - t\cos\alpha) - C'^2(c' + t\sin\alpha)},$$

ou

$$u'[B'^2(c' + t\sin\alpha) - C'^2(d' - t\cos\alpha)] + V'[A'^2(d' - t\cos\alpha) - C'^2(c' + t\sin\alpha)] + C'^4 - A'^2B'^2 = 0;$$

telle est l'équation de la droite *(c)* rapportée aux axes $o'x'$ et $o'y'$.

Or, si on représente par u'_j et v'_j les coordonnées du point réciproque J, par rapport à ces mêmes axes, on a

$$c' + t\sin\alpha = -u'_j, \quad d' - t\cos\alpha = -v'_j. \ (*)$$

(*) Il convient de rappeler que α désigne (§ 48) l'angle de la partie descendante de normale en C à la ligne moyenne avec la verticale descendante du point C, et que cet angle est regardé comme positif s'il est situé à gauche de cette verticale et comme négatif dans le cas contraire.

Digitized by Google

L'équation de la droite *(c)* peut donc finalement s'écrire

$$u'(B'^2u'_j - C'^2v'_j) + V'(A'^2v'_j - C'^2u'_j) - (C'^4 - A'^2B'^2) = 0.$$

En rapprochant cette équation, de l'équation générale (9) *(n° 1)* de l'antipolaire d'un point quelconque (u'_1, v'_1) par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de la fibre moyenne, on voit immédiatement que, u' et V' étant les coordonnées courantes, elle représente l'antipolaire du point (u'_j, v'_j), c'est-à-dire du point réciproque J; — ce qui démontre le théorème énoncé.

COROLLAIRE I. — *Les droites (c) à utiliser pour la détermination des lignes d'influence des tensions élastiques par unité de surface développées aux divers points, tels que* F, *d'une section transversale donnée, de centre de gravité* C, *concourent en un même point, qui est l'antipôle de la normale en* C *à la ligne moyenne par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de cette ligne.*

En effet, les points réciproques J des points F de la section étant situés sur une ligne droite, qui est la normale en C à la ligne moyenne, les antipolaires (*c*) correspondantes passent, en vertu d'un théorème connu, par l'antipôle de cette droite.

COROLLAIRE II. — *Ligne d'influence de la tension longitudinale totale relative à une section donnée.*

Il résulte de la formule de définition (10) que le point réciproque du centre de gravité C d'une section donnée, est le point à l'infini de la normale en C à la ligne moyenne. La droite (*c*), à employer pour la construction de la ligne d'influence de la tension élastique par unité de surface en C, est, en vertu du théorème précédent, l'antipolaire de ce point à l'infini, c'est-à-dire le diamètre de l'ellipse centrale d'inertie conjugué à la direction de la normale en C à la ligne moyenne.

D'autre part, N représentant la tension longitudinale totale relative à la section de centre de gravité C, la tension élastique par unité de surface en C, a pour expression

$$R_c = \frac{N}{S_c};$$

les quantités N et R sont, par conséquent, proportionnelles, et il en est de même des ordonnées correspondantes de leurs lignes d'influence.

Donc :

Étant donnée une section, de centre de gravité C, *si on applique tout le long de la ligne moyenne de l'arc des forces fictives verticales* $\frac{y-z}{I}ds$, — ($y-z$) *désignant les segments de verticales compris entre la ligne moyenne et le diamètre de l'ellipse centrale d'inertie conjugué à la direction de la normale en* C *à la dite ligne moyenne, — qu'avec une distance polaire convenablement choisie on trace la courbe funiculaire correspondante à ces efforts, qu'on mène les tangentes aux extrémités de cette courbe, et qu'on limite ces tangentes à la verticale de* C *: les segments de verticales compris entre cette courbe funiculaire et ces tangentes, sont égaux aux ordonnées de la ligne d'influence de la tension longitudinale totale relative à la section considérée.*

Digitized by Google

Remarque. — Le théorème qui précède et ses deux corollaires ont été démontrés pour le cas le plus complexe où l'arc est de structure dissymétrique. Ces propositions restent vraies dans le cas particulier où l'arc est symétrique par rapport à la verticale du milieu de la corde.

Remarque sur l'application des théorèmes qui précèdent.

3. — Toutes les fois qu'on se proposera de tracer les lignes d'influence de M, de X, de Y, ou de R, pour plusieurs sections et pour plusieurs fibres de l'arc, il sera avantageux de construire d'abord l'ellipse centrale d'inertie de la fibre moyenne ; puis de déterminer les droites $o''o'''$, $o'o'''$, $o'o''$, ou (c), en s'appuyant sur les théorèmes que nous venons d'énoncer.

La construction de l'ellipse centrale d'inertie s'effectue conformément à des règles connues.

Cette opération est en général assez simple, parce que dans la majorité des cas, l'arc admet un axe de symétrie ; de sorte qu'après avoir cherché la situation du centre o' sur cet axe, on connaît la *position* des deux axes de l'ellipse centrale, dont il ne reste plus à déterminer que la *grandeur*.

Quant aux droites $o''o'''$, $o'o'''$, $o'o''$ et (c), les propriétés élémentaires de l'ellipse en fournissent la détermination.

Expression simple de la distance polaire à adopter pour la construction des lignes d'influence des tensions élastiques par unité de surface.

4. — Les considérations qui précèdent permettent de donner à la distance polaire $\overline{B}$, à prendre pour le tracé de la ligne d'influence de la tension élastique R en un point d'une fibre quelconque, une expression plus simple et plus facile à calculer ou à construire, que celle indiquée au § 48.

Nous avons vu à ce paragraphe qu'on devait adopter

$$\overline{B} = \frac{\overline{m} \times \overline{m'}}{\overline{p}},$$

le produit $m \times m'$ étant d'ailleurs tiré de la relation (d) du même paragraphe, savoir :

$$(d) \qquad \frac{1}{m \times m'} = \frac{vb}{\rho^2} \times \frac{1}{(o'q')\,\Phi'} - \frac{\cos\alpha}{(o''q'')\,\Phi''} + \frac{\sin\alpha}{(o'''q''')\,\Phi'''}.$$

Remplaçons dans cette relation Φ', Φ'', Φ''', en fonction de φ', φ'', φ''' ; il vient

$$\frac{1}{m \times m'} = \frac{n\Delta s}{I_m}\left[\frac{vb}{\rho^2} \times \frac{1}{(o'q')\,\varphi'} - \frac{\cos\alpha}{(o''q'')\,\varphi''} + \frac{\sin\alpha}{(o'''q''')\,\varphi'''}\right];$$

remplaçons-y également $(o'q')\varphi'$, $(o''q'')\varphi''$, $(o'''q''')\varphi'''$ par leurs valeurs

Digitized by Google

fournies par (11), (12) et (13) du n° 2, et $\frac{v}{\rho^2}$ par $-\frac{1}{t}$; nous obtenons, après quelques transformations simples,

$$m \times m' = \frac{-t\,(A'^2B'^2 - C'^4)}{A'^2(d' - t\cos\alpha) - C'^2(c' + t\sin\alpha)} \times \frac{I_m}{n\Delta s}\int_A^B \frac{ds}{I}.$$

Or, si on calcule l'ordonnée à l'origine $o'Q$ (Pl. 200, *fig. 3*) de la droite (c) ou ts rapportée aux axes $o'x'$ et $o'y'$, en faisant $u' = 0$ dans l'équation (c'') du n° 2, on trouve

$$o'Q = \frac{A'^2B'^2 - C'^4}{A'^2(d - t\cos\alpha) - C'^2(c' + t\sin\alpha)}.$$

On peut par suite écrire

$$m \times m' = -t \times o'Q \times \frac{I_m}{n\Delta s}\int_A^B \frac{ds}{I} = -\frac{t}{b}(o'Q)\,\frac{I_m}{n\Delta s}\int_A^B \frac{bds}{I}.$$

Mais (§ 38, formule 2)

$$\int_A^B \frac{bds}{I} = \varphi' = \frac{n\Delta s}{I_m}\,\Phi';$$

donc

$$m \times m' = -\frac{t}{b}(o'Q)\,\Phi',$$

ou

$$\overline{m} \times \overline{m'} = -\frac{\overline{t}}{\overline{b}}(\overline{o'Q})\,\overline{\Phi'}.$$

En substituant dans l'expression de $\overline{B}$, on a finalement

$$\overline{B} = -\frac{\overline{t}}{\overline{b}} \times \frac{(\overline{o'Q})\,\overline{\Phi'}}{\overline{p}}.$$

Dans cette formule $\overline{t}$, $\overline{b}$ et $\overline{p}$ sont des quantités connues; $\overline{o'Q}$ et $\overline{\Phi'}$ se lisent sur l'épure.

Cette nouvelle expression de B est plus simple que celle du § 48, puisqu'elle n'exige pas le calcul du produit $m \times m'$ au moyen de la relation (d).

Remarque. — Elle reste exacte dans le cas particulier où l'arc est de structure symétrique par rapport à la verticale du milieu de la corde.

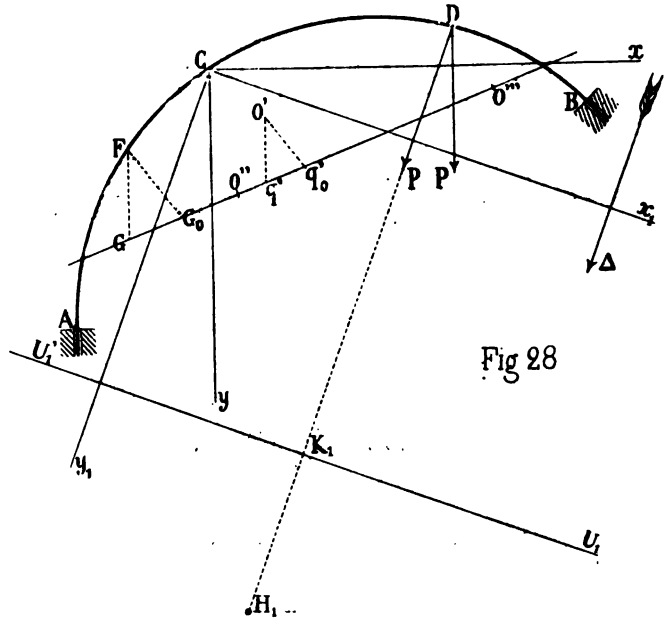
Remarque sur les valeurs des forces fictives et des distances polaires à employer pour la construction des lignes d'influence.

5. — Considérons, pour fixer les idées, la ligne d'influence du moment fléchissant M développé en une section C.

Digitized by Google

La distance polaire à employer et les forces fictives à appliquer aux milieux tels que F (*fig. 28*) des divisions Δs de la ligne moyenne de l'arc, ont pour expressions (§ 45)

$$\overline{B}' = \frac{\overline{o'q'} \times \overline{\Phi}'}{\overline{P}} \quad \text{et} \quad (y - z') \frac{\frac{1}{n} I_m}{I} = GF \times \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}.$$



Par o' et par F, menons des parallèles $o'q'_0$ et FG_0 à une direction arbitrairement choisie ; on a

$$\frac{o'q'_0}{o'q'} = \frac{G_0F}{GF};$$

ce rapport est indépendant de la position du point G sur la ligne moyenne : désignons-le par γ.

D'après une propriété connue des polygones funiculaires, nous ne changerons rien au polygone d'où se déduit la ligne d'influence de M, en multipliant la distance polaire $\overline{B}'$ et les forces fictives $GF \times \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, par le facteur constant γ, c'est-à-dire en leur attribuant les valeurs

$$B'_0 = \frac{\overline{o'q'} \times \overline{\Phi}'}{\overline{P}} \times \frac{\overline{o'q_0}}{\overline{o'q'}} = \frac{\overline{o'q'_0} \times \overline{\Phi}'}{\overline{P}} \quad \text{et} \quad GF \times \frac{\frac{1}{n} I_m}{I} \times \frac{G_0F}{GF} = G_0F \times \frac{\frac{1}{n} I_m}{I},$$

Digitized by Google

qui ne diffèrent des valeurs primitives. que par la substitution des lignes parallèles $o'q'_0$ et G_0F, de direction arbitrairement choisie, aux lignes verticales $o'q'$ et GF.

On pourra, en particulier, remplacer, dans les expressions de la distance polaire et des forces fictives, les segments de verticales $o'q'$ et GF, par les longueurs des perpendiculaires abaissées de o' et de G sur $o''o'''$. Cette substitution sera avantageuse, au point de vue de l'exactitude matérielle des constructions, toutes les fois que la droite $o''o'''$ fera un angle assez aigu avec la verticale.

La même remarque s'applique aux distances polaires et aux forces fictives à considérer pour la détermination des lignes d'influence de X, de Y, de R et de N.

Généralisation des théorèmes sur les lignes d'influence : lignes d'influence relatives à des forces de directions différentes.

6. — Les lignes d'influence dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent sont relatives à une charge verticale P.

On peut généraliser la définition des lignes d'influence en considérant une force d'intensité P (*fig. 28*, p. 156), de direction donnée Δ, se déplaçant parallèlement à elle-même, tandis que son point d'application D décrit la ligne moyenne de l'arc.

La ligne d'influence d'un effort élastique d'espèce quelconque, développé en une section C (moment fléchissant, composante horizontale ou verticale de la résultante des tensions élastiques, etc.) est alors le lieu des points H_1 obtenus en projetant orthogonalement les points d'application D de la force mobile, sur un axe $U_1U'_1$ perpendiculaire à la direction Δ, et en portant en ordonnées, à partir des points K_1 ainsi déterminés, des longueurs K_1H_1 représentant les valeurs correspondantes de l'effort élastique en question.

Cela posé, remarquons que, dans la théorie des lignes d'influence relatives à une charge verticale, nous n'avons imposé aucune corrélation entre la forme géométrique de l'arc et la direction de la verticale. Les résultats de cette théorie sont donc applicables aux lignes d'influence relatives à une force de direction Δ arbitrairement choisie.

Il est sous-entendu que les axes Cx et Cy, précédemment considérés, doivent alors être remplacés par deux axes Cx_1 et Cy_1 respectivement perpendiculaire et parallèle à Δ, et que les forces fictives verticales doivent être remplacées par des forces parallèles à Δ.

Enfin, il résulte des directions données aux nouveaux axes, que les segments de verticales, tels que $y - z'$, $y - z''$....., qui entrent dans les valeurs des forces fictives, et ceux tels que $o'q'$, $o''q''$....., qui entrent dans les valeurs des distances polaires B', B''...., doivent être remplacés par des segments $y_1 - z'_1$, $y_1 - z''_1$ ..... $o'q'_1$, $o''q''_1$..... mesurés sur des parallèles à Δ.

Toutefois, la remarque du n° 5 montre que cette dernière condition n'est pas indispensable et qu'on peut mesurer les segments en question sur des parallèles à une direction arbitrairement choisie.

Digitized by Google

THÉORÈME. — 1° *Les différents polygones funiculaires d'où se déduisent les lignes d'influence du moment fléchissant en une section* C, *relatives à des forces de directions* Δ *différentes, peuvent être tracés en conservant des valeurs constantes aux forces fictives et à la distance polaire. Les lignes d'action des forces fictives changent seules, en pivotant autour de leurs points d'application respectifs, de manière à être constamment parallèles à* Δ;

2° *La même proposition s'applique aux polygones funiculaires d'où se déduisent les lignes d'influence de la tension élastique par unité de surface en un point donné d'une fibre de l'arc, et à ceux d'où se déduisent les lignes d'influence de la tension longitudinale totale en une section donnée.*

Nous ne démontrerons que le 1°; le 2° se justifierait de la même manière.

La position de la droite $o''o'''$, antipolaire de C par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de la ligne moyenne, est indépendante de la direction Δ de la force mobile.

D'autre part, — ainsi que nous l'avons fait remarquer plus haut, — nous sommes maîtres, pour le tracé de chacune des courbes funiculaires considérées, de la direction suivant laquelle doivent être mesurés les segments de droites, tels que G_oF et $o'q'_o$, qui entrent dans les valeurs $G_oF \times \frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$ et $\frac{\overline{o'q'_o} \times \overline{\Phi'}}{\overline{P}}$ des forces fictives et de la distance polaire à adopter.

Nous pouvons, par conséquent, mesurer ces segments suivant une direction unique pour tous les polygones funiculaires. Les longueurs G_oF et $o'q'_o$ sont dès lors constantes, à cause de la fixité de $o''o'''$; et il en est de même des valeurs des forces fictives et de la distance polaire correspondantes aux différents polygones, puisque $\frac{\frac{1}{n} I_m}{I}$, Φ' et P sont des quantités invariables.

Théorème relatif aux variations de température.

7. — *La ligne d'action commune des réactions développées aux encastrements par une variation de température, coïncide avec le diamètre de l'ellipse centrale d'inertie de la fibre moyenne, conjugué à la direction perpendiculaire à la corde de l'arc.*

Cette proposition résulte immédiatement du rapprochement du théorème du § 49 et de celui du n° 1 de la présente note.

COROLLAIRE. — *Si l'arc admet un axe de symétrie, la ligne d'action commune des réactions aux encastrements coïncide avec l'axe de l'ellipse centrale perpendiculaire à cet axe de symétrie.*

Digitized by Google

Note II

EXTENSION AUX SYSTÈMES RÉTICULAIRES (*) DES THÉORÈMES ET DES TRACÉS RELATIFS AUX PIÈCES PLEINES

Tous les résultats énoncés dans cette seconde partie, pour les pièces pleines, s'étendent aux systèmes réticulaires plans, astreints aux mêmes sujétions. L'analyse à suivre est, dans son ensemble, identique à celle que nous avons exposée ; elle doit toutefois être précédée d'une transformation des formules du chapitre III (1re partie) au moyen du théorème de Ritter, relatif aux tensions dans les barres des systèmes articulés.

Ne pouvant entrer dans le détail des démonstrations, sans dépasser les limites qui nous sont imposées pour ce Mémoire, nous nous bornerons à indiquer brièvement comment cette extension doit être entendue.

Dans l'étude des pièces pleines, c'est aux divers points de la ligne moyenne que nous avons appliqué, tantôt des forces données, tantôt des forces fictives. C'est aussi à ces points que nous avons rapporté les moments fléchissants M produits par les forces extérieures et les quantités *MX*, *MY* et *T*, relatives aux forces fictives.

Dans les systèmes réticulaires, la ligne moyenne n'existe plus, et on doit la remplacer par une série de points isolés qui sont les *nœuds* de la construction. C'est à ces nœuds que nous appliquerons, tantôt des forces données, tantôt des forces fictives, et c'est à eux que nous rapporterons les moments fléchissants M et les quantités *MX*, *MY* et *T*.

Tandis que, dans les pièces pleines, les forces fictives étaient infiniment petites et en nombre fini, dans les systèmes réticulaires, elles sont finies à la fois en intensité et en nombre.

Dans les pièces pleines, le rapport infiniment petit $\frac{ds}{I}$ (ou $\frac{dx}{I}$ pour les poutres droites) qui entre toujours dans l'expression des forces fictives, est une constante spécifique de chaque point, ou mieux, de chaque élément *ds* (ou *dx*) de la ligne moyenne. Dans les systèmes réticulaires, la constante spécifique de chaque nœud, que nous représenterons par $\frac{1}{F}$, a pour valeur

$$\frac{1}{F} = \frac{s}{Sh^2},$$

où *h* est la distance du nœud à la barre opposée, *s* la longueur et S la section de cette barre.

On remarquera qu'au point de vue de l'homogénéité, F est du troisième degré par rapport aux longueurs.

Cela posé, la règle pour passer des propriétés des pièces pleines à celles des systèmes réticulaires est la suivante :

(*) Un *système réticulaire* est un réseau de barres rectilignes articulées entre elles et formant une série de triangles juxtaposés. Cette dénomination est empruntée à M. Maurice Lévy.

Digitized by Google

Tous les résultats (théorèmes et constructions géométriques) indiqués pour les pièces pleines, s'étendent aux systèmes réticulaires astreints aux mêmes sujétions, par la substitution :

1° *De la série de points isolés formée par les nœuds, à la série de points infiniment voisins, qui constitue la ligne moyenne;*

2° *Des constantes spécifiques* $\frac{1}{\Gamma} = \frac{s}{Sh^2}$ *à celles* $\frac{ds}{I}$ *et* $\frac{dx}{I}$;

3° *De sommes à un nombre fini de termes, aux sommes intégrales.*

Voici les applications principales de cette règle :

I. — Construction des déformations élastiques.

Considérons, pour fixer les idées, un système réticulaire astreint à des liaisons quelconques mais telles que, par la suppression des liaisons surabondantes, on peut le ramener à n'être plus assujetti qu'au premier système de liaisons indépendantes de l'élasticité (nœud F fixe et nœud E assujetti à demeurer sur une droite WW′ donnée).

Proposons-nous, par exemple, de déterminer graphiquement le déplacement $(l_y)_c$ d'un nœud quelconque C, estimé suivant une direction oy perpendiculaire à WW′, les moments fléchissants M développés en chaque nœud par les forces extérieures et par les réactions, étant supposés connus.

Le problème similaire a été résolu pour une pièce pleine, au paragraphe 34.

En s'y reportant, on voit, par application de la règle qui précède, qu'il faut considérer aux différents nœuds, des forces fictives égales à $\frac{Ms}{ESh^2}$, ou $\frac{M}{E\Gamma}$, et parallèles à oy; puis tracer, avec une distance polaire B arbitraire, le polygone funiculaire correspondant ; enfin, tirer une ligne de fermeture E_yF_y passant par les points d'intersection de ce polygone avec les parallèles à oy menées par les nœuds E et F.

Si on désigne alors par c_yC_y les segments interceptés, par le polygone et la ligne de fermeture, sur la parallèle à oy menée par le nœud C, le déplacement cherché a pour expression

$$(1) \qquad (l_y)_c = B \times c_yC_y,$$

B étant lu sur l'épure à l'échelle des efforts fictifs, et c_yC_y, à l'échelle des longueurs.

Les autres constructions indiquées aux paragraphes 34 et 35, s'étendent de la même manière aux systèmes réticulaires.

Nota. — La remarque du § 36 s'applique aux systèmes réticulaires composés de barres d'élasticité constante : au lieu d'opérer, comme précédemment, sur des efforts fictifs égaux à $\frac{M}{E\Gamma}$, il sera commode d'opérer sur des efforts proportionnels à ceux-ci et ayant pour valeur générale

$$\frac{M}{E\Gamma} \times \frac{E\Gamma_m}{n} = M \frac{\frac{1}{n}\Gamma_m}{\Gamma},$$

Digitized by Google

où n et F_m sont des constantes ; n est un nombre quelconque ; F_m est l'inverse de la constante spécifique d'un nœud arbitrairement choisi, la plus grande ou la plus petite, par exemple.

On montrerait, comme au § 36, que l'expression (1) du déplacement $(l_y)_c$ doit alors être remplacée par la suivante :

$$(l_y)_c = \frac{n}{E\Gamma_m} B \times c_y C_y.$$

II. — Arc réticulaire encastré à ses deux extrémités.

On dit qu'une extrémité d'un arc réticulaire est encastrée, lorsque le nœud extrême A d'extrados ou d'intrados, est astreint à rester fixe, tandis que le nœud extrême A' d'intrados ou d'extrados, est assujetti à demeurer sur la droite AA' fixe dans l'espace. Il en résulte que la barre extrême AA' a une situation angulaire invariable et qu'une de ses extrémités est fixe, mais que sa longueur peut varier avec les intensités des forces agissant sur l'arc.

Nous désignerons respectivement par les lettres A et B, les nœuds fixes des extrémités encastrées de gauche et de droite de l'arc.

La droite AB sera la *corde* de l'arc.

1° Forces extérieures fixes

Des forces extérieures quelconques sont appliquées aux nœuds d'un arc réticulaire encastré. On peut se proposer de déterminer le moment fléchissant M en un nœud quelconque C, ainsi que les composantes rectangulaires X et Y de la résultante de translation des forces élastiques développées dans la *section transversale* passant par ce nœud et rencontrant la barre opposée.

Le problème analogue a été traité pour l'arc plein, au chapitre II (§§ 37 et 38).

En s'y référant, on voit que, dans le cas de l'arc réticulaire, le centre fixe o' est le centre de forces fictives parallèles $\frac{b}{\Gamma}$, appliquées aux différents nœuds.

Les centres o'' et o''' correspondants au nœud C, sont les centres de forces fictives parallèles $\frac{y}{\Gamma}$ et $\frac{x}{\Gamma}$, agissant en chaque nœud, — x et y désignant les coordonnées des nœuds, par rapport à deux axes rectangulaires Cx et Cy passant par C et parallèles aux directions suivant lesquelles on veut évaluer les composantes X et Y.

Le centre variable ω est le centre de forces fictives parallèles $\frac{M'}{\Gamma}$, appliquées à chaque nœud, — M représentant les moments fléchissants que développeraient, aux nœuds, les forces extérieures données, si l'arc était scindé en deux tronçons par une section transversale rencontrant le nœud C et la barre opposée à ce nœud.

Digitized by Google

Les intégrales φ', φ'', φ''', S deviennent des sommes ayant pour expressions

$$\varphi' = \sum_{A}^{B} \frac{b}{\Gamma}, \quad \varphi'' = \sum_{A}^{B} \frac{y}{\Gamma}, \quad \varphi''' = \sum_{A}^{B} \frac{x}{\Gamma}, \quad S = \sum_{A}^{B} \frac{M'}{\Gamma},$$

A et B étant les nœuds extrêmes de l'arc.

Enfin, les inconnues $\frac{M}{b}$, X et Y sont encore exprimées par les formules finales (1) du § 37.

Remarque. — Pour la détermination des centres o', o'', o''', ω et des sommes φ', φ'', φ''', S, il sera avantageux de remplacer, — par analogie avec ce qui a été fait au § 38, — les forces fictives $\frac{b}{\Gamma}$, $\frac{y}{\Gamma}$, $\frac{x}{\Gamma}$ et $\frac{M'}{\Gamma}$, par $b\frac{\frac{1}{n}\Gamma_m}{\Gamma}$, $y\frac{\frac{1}{n}\Gamma_m}{\Gamma}$, $x\frac{\frac{1}{n}\Gamma_m}{\Gamma}$ et $M'\frac{\frac{1}{n}\Gamma_m}{\Gamma}$, n et Γ_m étant les constantes définies plus haut. *(Construction des déformations élastiques. — Nota.)*

Φ', Φ'', Φ''' et Σ représentant les longueurs des polygones de ces forces fictives, les inconnues seront alors données par les formules (1 *bis*) du § 38.

2° Charges mobiles. — Lignes d'influence.

Dans le cas des pièces pleines, nous avons défini les lignes d'influence, en considérant une charge mobile P dont le point d'application décrivait la ligne moyenne. Dans le cas des systèmes réticulaires, les forces extérieures n'agissant, par hypothèse, que sur les nœuds, nous supposerons que le point d'application de la charge mobile P se transporte brusquement d'un nœud à l'autre, en passant alternativement de l'extrados à l'intrados et de l'intrados à l'extrados, c'est-à-dire en suivant le contour brisé des barres dites de remplissage. On voit, dès lors, que les lignes d'influence qui, dans les pièces pleines, étaient des courbes continues, se réduisent, en réalité, dans les systèmes réticulaires, à une série de points isolés correspondants aux nœuds. Quoi qu'il en soit, nous appellerons ligne d'influence dans les systèmes réticulaires, le polygone formé en joignant ces points deux à deux, dans l'ordre qui correspond au cheminement sus-indiqué du point d'application de la charge P (*).

(*) En fait, la charge mobile ne peut passer alternativement de l'extrados à l'intrados, ainsi que nous le supposons pour faciliter la théorie: elle agit constamment, soit sur l'extrados, lorsque le tablier est au-dessus de l'arc, soit sur l'intrados, lorsqu'il est suspendu à l'arc; elle peut également, et c'est le cas où le tablier est à mi-hauteur de l'arc, agir sur l'extrados, dans le voisinage des retombées, et sur l'intrados, dans la région du sommet. Il faut remarquer enfin qu'elle peut, dans son cheminement réel, n'avoir d'action que sur une partie seulement des nœuds de l'extrados ou de l'intrados.

Quoi qu'il en soit, ayant construit, par la méthode que nous allons indiquer, la ligne d'influence répondant au cheminement théorique de la charge mobile, on pourra toujours ne conserver ensuite que les sommets de cette ligne, qui correspondent à ceux des nœuds où la charge peut effectivement être appliquée.

Digitized by Google

Cela posé, le théorème fondamental II du § 43 se transforme en le suivant :

Étant donnés un arc réticulaire encastré à ses deux extrémités, un nœud quelconque C, *et une charge mobile* P *parcourant cet arc en passant alternativement d'un nœud d'extrados à un nœud d'intrados et inversement, si on applique successivement des forces fictives verticales* $1^{o}\ \frac{y-z'}{\Gamma}$, $2^{o}\ \frac{y-z''}{\Gamma}$, $3^{o}\ \frac{y-z'''}{\Gamma}$, *aux divers nœuds de l'arc* $(y-z', y-z'', y-z'''$ *étant respectivement les longueurs des segments de verticales compris entre ces nœuds et les côtés* $o''o'''$, $o'o'''$, $o'o''$ *du triangle formé par le centre fixe* o' *de l'arc et par les centres* o'' *et* o''' *correspondants au nœud* C), *qu'avec des distances polaires arbitraires, on construise les trois polygones funiculaires correspondants à ces trois espèces de forces, en suivant l'ordre du cheminement de la charge mobile, qu'enfin on prolonge les côtés extrêmes de ces polygones jusqu'à la verticale du nœud* C :

Les segments de verticales, compris entre chacun de ces polygones et leurs côtés extrêmes prolongés, sont respectivement proportionnels aux ordonnées des lignes d'influence du moment fléchissant au nœud C, *et des composantes horizontale et verticale de la résultante de translation des forces élastiques, développées dans la section transversale passant par le nœud* C *et rencontrant la barre opposée.*

Les théorèmes I, II et III du § 44 s'appliquent aux polygones funiculaires ci-dessus, les côtés extrêmes de ces polygones remplaçant, bien entendu, les tangentes considérées dans ces théorèmes.

La construction des lignes d'influence s'effectuera conformément aux indications du § 45 :

On attribuera aux forces fictives les valeurs

$$(y-z')\,\frac{\frac{1}{n}\,\Gamma_m}{\Gamma},\quad (y-z'')\,\frac{\frac{1}{n}\,\Gamma_m}{\Gamma},\quad (y-z''')\,\frac{\frac{1}{n}\,\Gamma_m}{\Gamma},$$

n et Γ_m étant les constantes définies précédemment *(Construction des déformations élastiques. — Nota)* ; et on prendra des distances polaires égales à

$$\overline{B'}=\frac{\overline{o'q'}\times\overline{\Phi'}}{\overline{P}},\quad \overline{B''}=\frac{\overline{o''q''}\times\overline{\Phi''}}{\overline{P}},\quad \overline{B'''}=\frac{\overline{o'''q'''}\times\overline{\Phi'''}}{\overline{P}},$$

afin d'obtenir à l'échelle des forces, les ordonnées des lignes d'influence cherchées.

Dans ces formules Φ', Φ'', Φ''' représentent les quantités définies plus haut. *(Forces extérieures fixes. — Remarque.)*

Nous croyons inutile d'entrer dans plus de détails et d'indiquer ce que deviennent les théorèmes et les constructions des § 46 et 47, l'application de la règle de transformation ne présentant aucune difficulté.

Nous n'insisterons pas davantage sur les théorèmes et les indications des n^os^ 1, 3, 5 et 6 de la Note I ; nous ferons seulement remarquer que

Digitized by Google

l'ellipse centrale d'inertie correspond alors aux nœuds de l'arc, considérés comme formant un système de points matériels dont le poids, variable d'un nœud à l'autre, a pour expression générale $\frac{s}{Sh^2}$ ou $\frac{1}{\Gamma}$. (*)

3° Effets des variations de température.

Tout ce qui a été dit au § 49 ainsi qu'au n° 7 de la Note I, s'applique à l'arc réticulaire ; la corde AB $= a$ est alors la droite de jonction des nœuds fixes A et B des extrémités encastrées.

III. Poutre continue réticulaire.

Nous ne faisons aucune hypothèse sur la hauteur de la poutre, qui peut être constante ou variable, mais nous supposons expressément que les nœuds d'appui sont de niveau.

Charges mobiles. — Lignes d'influence.

L'extension à la poutre continue réticulaire, des définitions des points trisecteurs, des résultantes trisectrices, des foyers et des composantes aux foyers (§ 50), s'effectue aisément au moyen de la règle de transformation donnée plus haut. Nous ne nous y arrêterons donc pas, renvoyant, d'ailleurs, pour des indications détaillées sur les foyers, à la *Statique graphique* de M. Maurice Lévy (IV^e^ Partie. — Chapitre IX).

Le centre fixe O_k d'une travée l_k et le centre O'_k correspondant à un nœud C satisfont aux théorèmes I et II du § 52, qui en font connaître la position.

(*) Par des considérations analogues à celles du § 48 et du n° 2 de la Note I, on déduit la proposition suivante, du théorème fondamental qui précède :

ζ désignant les segments de verticales compris entre les nœuds de l'arc et l'antipolaire du sommet S opposé à une barre quelconque MN, par rapport à l'ellipse centrale d'inertie définie plus haut, — appliquons à ces nœuds des forces fictives verticales $\frac{\zeta}{\Gamma}$, *traçons avec une distance polaire quelconque, le polygone funiculaire correspondant, enfin prolongeons les côtés extrêmes de ce polygone soit jusqu'à la verticale du sommet S, ou bien seulement jusqu'aux verticales des nœuds M et N, suivant que MN est une barre de contour extérieur ou bien une barre de remplissage :*

Les segments de verticales, compris entre ce polygone funiculaire et ses côtés extrêmes prolongés, sont proportionnels aux ordonnées de la ligne d'influence de la tension élastique totale dans la barre MN.

Dans l'épure, on attribuera aux forces fictives la valeur générale $\frac{\zeta \Gamma_m}{n\Gamma}$; et, pour que la construction fournisse *à l'échelle des forces* les ordonnées de la ligne d'influence, on prendra une distance polaire égale à $\frac{\overline{o'Q} \times \overline{\Phi'}}{\overline{\Gamma}} \times \frac{\overline{h}}{\overline{b}}$, — h désignant la distance du sommet S à la barre MN, $o'Q$ le segment de verticale compris entre le centre fixe o' de l'arc et l'antipolaire de S, et b la longueur déjà employée pour la détermination de Φ'.

On démontre facilement que *les prolongements des côtés extrêmes du polygone funiculaire ci-dessus se coupent toujours sur la verticale du sommet S.*

(Pour la définition du *sommet* opposé à une barre d'un système réticulaire, voir la *Statique graphique* de M. Maurice Lévy. — § 203.)

Digitized by Google

Ces points déterminés, nous pouvons, comme dans le cas de la poutre pleine, construire les deux diagrammes polygonaux des z_1 et des z_2 (§ 54).

Le théorème fondamental II du § 54 prend, dès lors, la forme suivante.

Étant donnés une poutre continue réticulaire, un nœud C *arbitrairement choisi dans une travée quelconque* $A_{k-1}A_k$, *et une charge mobile* P *parcourant cette poutre en passant alternativement d'un nœud inférieur à un nœud supérieur et inversement, si on applique successivement des efforts fictifs* $1^\circ \frac{z_1}{\Gamma}$, $2^\circ \frac{z_2}{\Gamma}$, *aux divers nœuds de la poutre* (z_1 *et* z_2 *étant les ordonnées des diagrammes polygonaux sus-mentionnés, correspondantes à ces nœuds*), *qu'avec des distances polaires arbitraires on construise les deux polygones funiculaires respectivement relatifs à ces efforts, qu'on leur mène des lignes de fermeture correspondantes à chacune des travées autres que celle* $A_{k-1}A_k$, *et qu'enfin on prolonge jusqu'à la verticale du nœud* C *les lignes de fermeture afférentes aux travées contiguës à celle* $A_{k-1}A_k$:

Les segments de verticales compris entre chacun de ces polygones funiculaires et les lignes de fermeture y relatives, sont respectivement proportionnels aux ordonnées des lignes d'influence du moment fléchissant au nœud C *et de l'effort tranchant développé dans la section transversale passant par ce nœud et rencontrant la barre opposée.*

Les propriétés énoncées au § 55 s'appliquent aux polygones funiculaires ci-dessus.

La construction des lignes d'influence s'effectuera conformément aux indications du § 56 :

On attribuera aux efforts fictifs les valeurs

$$z_1 \frac{\frac{1}{n}\Gamma_m}{\Gamma}, \quad \text{et} \quad z_2 \frac{\frac{1}{n}\Gamma_m}{\Gamma},$$

n et Γ_m étant les constantes définies précédemment (*Construction des déformations élastiques. — Nota)* ; et on prendra pour distances polaires les longueurs données par les formules *(a)* et *(b)* du § 56, afin d'obtenir à l'échelle des forces les ordonnées des lignes d'influence cherchées.

On étendrait de la même manière, aux poutres réticulaires, les propositions et les constructions géométriques des §§ 57, 58, 60, 61, 62, relatives à la poutre continue pleine, et celles du § 63 relatives à la poutre pleine à une seule travée, encastrée à ses deux extrémités.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES DE LA SECONDE PARTIE

CHAPITRE Ier

Page

Expressions symboliques et construction des déformations des pièces à fibres moyennes planes 3

31. Indications préliminaires. — 32. Expressions symboliques des déformations dans le cas où les liaisons indépendantes de l'élasticité sont du premier système. — 33. Expressions symboliques des déformations dans le cas où les liaisons indépendantes de l'élasticité sont du second système. — 34. Construction des déformations dans le cas où les liaisons indépendantes de l'élasticité sont du premier système. — 35. Construction des déformations dans le cas où les liaisons indépendantes de l'élasticité sont du second système. — 36. Remarques sur la construction des déplacements.

CHAPITRE II

Arc encastré à ses deux extrémités (*).

Première section.

Forces extérieures fixes 21

37. Méthode de détermination directe du moment fléchissant et des composantes, suivant deux directions rectangulaires quelconques, de la résultante de translation des forces intérieures en une section arbitrairement choisie. — Centre fixe de la travée — Centres correspondants à une section. — 38. Constructions auxquelles donne lieu l'application de la méthode. — 39. Détermination directe du moment fléchissant, de la tension longitudinale et de l'effort tranchant en une section arbitrairement choisie. — 40. Détermination directe des réactions aux encastrements.

Deuxième section.

Charges mobiles. — Lignes d'influence. 33

41. Indications préliminaires. — 42. Expressions nouvelles du moment fléchissant et des composantes de la résultante de translation des forces intérieures développées en une section arbitrairement choisie. — 43. Expressions du moment fléchissant et des composantes horizontale et verticale de la résultante de translation des efforts intérieurs produits en une section donnée de l'arc par le passage d'une charge mobile. — Les efforts fictifs $\frac{y-z'}{I}\,ds$, $\frac{y-z''}{I}\,d$ $\frac{y-z'''}{I}\,ds$. — Théorème fondamental relatif aux lignes d'influence. — 44. Propriétés des courbes funiculaires correspondantes aux forces fictives. $\frac{y-z'}{I}\,ds$, $\frac{y-z''}{I}\,ds$, $\frac{y-z'''}{I}\,ds$. — 45. Construction des lignes d'influence du moment fléchissant et des composantes horizontale et verticale de la résultante de translation des efforts intérieurs développés dans une section

(*) En ce qui concerne l'*arc articulé aux deux extrémités*, l'application des formules symboliques et des théorèmes de réciprocité permet de retrouver des résultats connus par ailleurs. Elle donne notamment une nouvelle démonstration du beau théorème de M. Maurice Lévy sur la *ligne de poussée*.
Ce n'est pas ici le lieu de traiter ce sujet.

Digitized by Google

arbitrairement choisie.— 46. Lignes d'influence des quantités M, X et Y correspondantes aux diverses sections de l'arc.— 47. Cas particulier où l'arc est de structure symétrique par rapport à la verticale du milieu de la corde. — 48. Ligne d'influence de la tension élastique par unité de surface, développée en un point donné d'une fibre arbitrairement choisie.

Troisième section.

Effets des variations de température 77

CHAPITRE III

Poutre droite continue. — Poutre droite encastrée.

Charges mobiles.— Lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant. 81
50. Rappel de propriétés connues. — Hypothèses et définitions.— 51. Expressions du moment fléchissant et de l'effort tranchant produits en une section quelconque par des charges données.— Centre fixe d'une travée.— Centre correspondant à une section.— 52. Propriétés et détermination des centres.— 53. Détermination des valeurs des produits $\left(c'_k - c_k\right)\varphi_k$ et $\left(c'_k - c_k\right)\varphi'_k$.—54. Expressions du moment fléchissant et de l'effort tranchant produits en une section quelconque par le passage d'une charge mobile. — Les efforts fictifs $\frac{z_1}{I}\,dx$, $\frac{z_2}{I}\,dx$. — Théorème fondamental relatif aux lignes d'influence.— 55. Propriétés des courbes funiculaires correspondantes aux efforts fictifs $\frac{z_1}{I}\,dx$ et $\frac{z_2}{I}\,dx$. — 56. Construction des lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant développés dans une section arbitrairement choisie d'une travée quelconque.— 57. Lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant, relatives aux différentes sections d'une même travée. — 58. Lignes d'influence du moment fléchissant relatives à certaines sections remarquables.— 59. Sur quelques propriétés des lignes d'influence. — 60. Lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant relatives à une section arbitrairement choisie d'une travée de rive. — 61. Lignes d'influence des réactions des appuis. — 62. Cas particulier où la poutre continue est de section constante.— 63. Poutre à une seule travée encastrée horizontalement à ses extrémités.

NOTE I

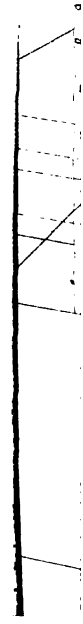
Sur quelques propriétés relatives à l'arc encastré à ses deux extrémités 148
1. Propriétés des droites qui joignent les centres.— 2. Théorème relatif à la droite (c) utilisée au § 48 pour la détermination de la ligne d'influence de la tension élastique par unité de surface, développée en un point donné d'une fibre arbitrairement choisie. — 3. Remarque sur l'application des théorèmes qui précèdent. — 4. Expression simple de la distance polaire à adopter pour la construction des lignes d'influence des tensions élastiques par unité de surface.— 5. Remarque sur les valeurs des forces fictives et des distances polaires à employer pour la construction des lignes d'influence.— 6. Généralisation des théorèmes sur les lignes d'influence ; lignes d'influence relatives à des forces de directions différentes. — 7. Théorème relatif aux variations de température.

NOTE II

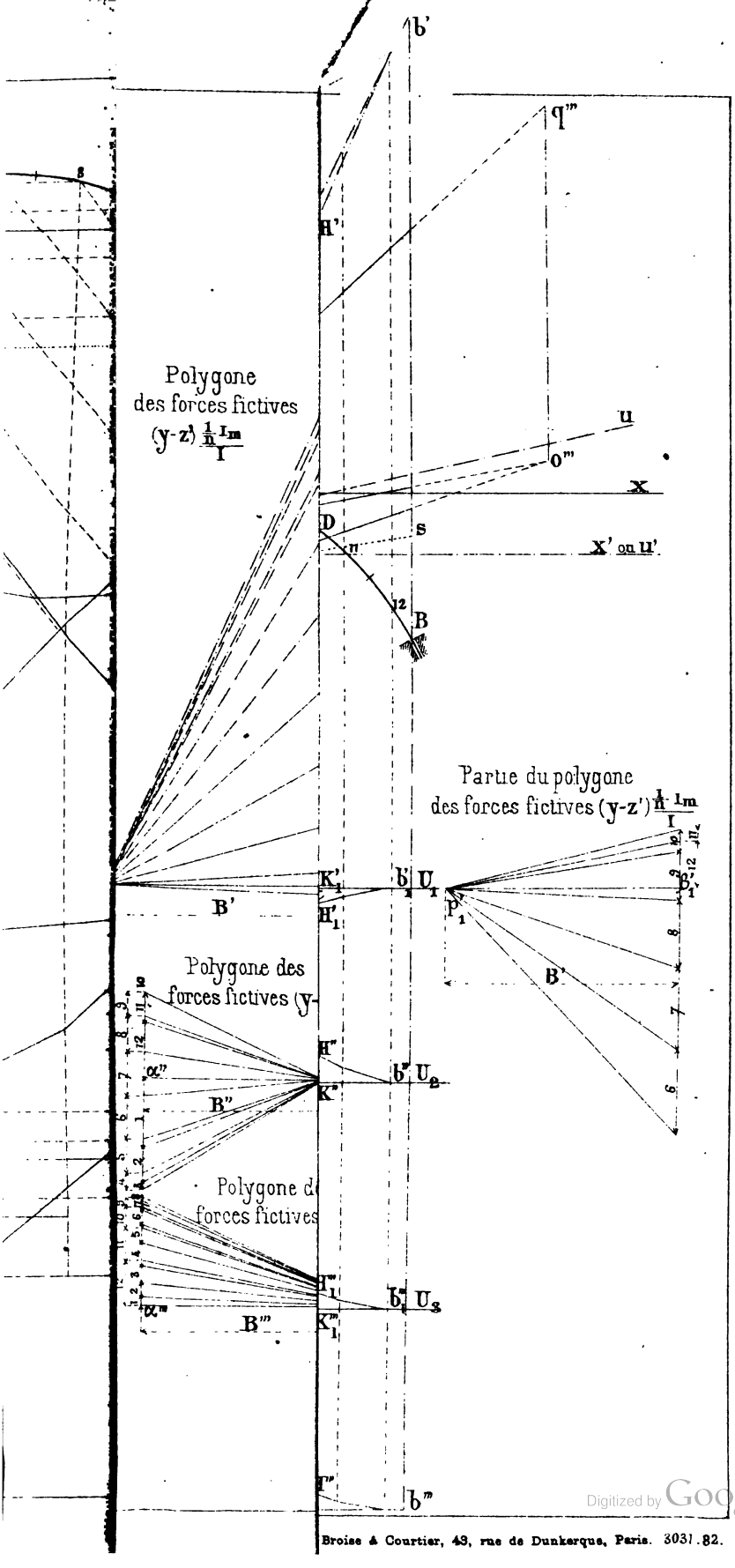
Extension aux systèmes réticulaires des théorèmes et des tracés relatifs aux pièces pleines 159

IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 13504-7-9.

Digitized by Google



Digitized by Google



Digitized by Google

Broise & Courtier, 43, rue de Dunkerque, Paris. 3031.82.

Digitized by Google

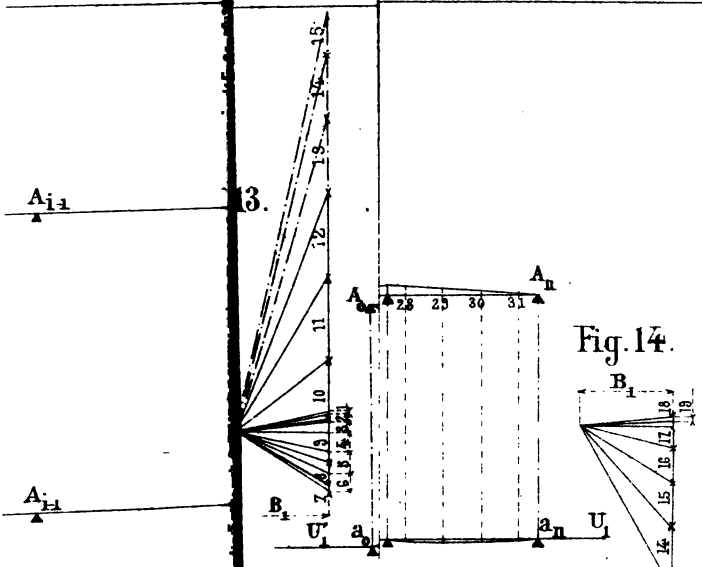


Fig. 14.

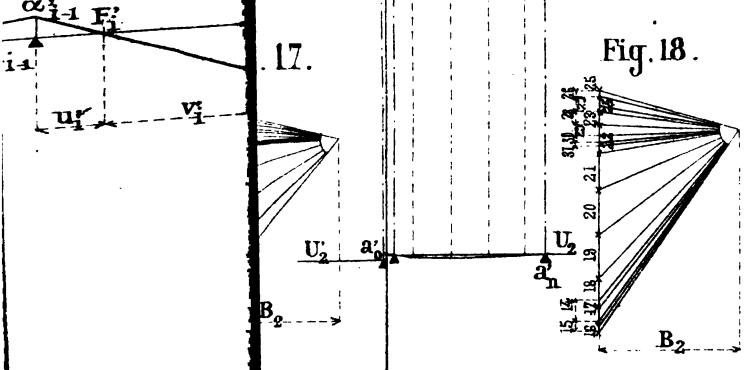
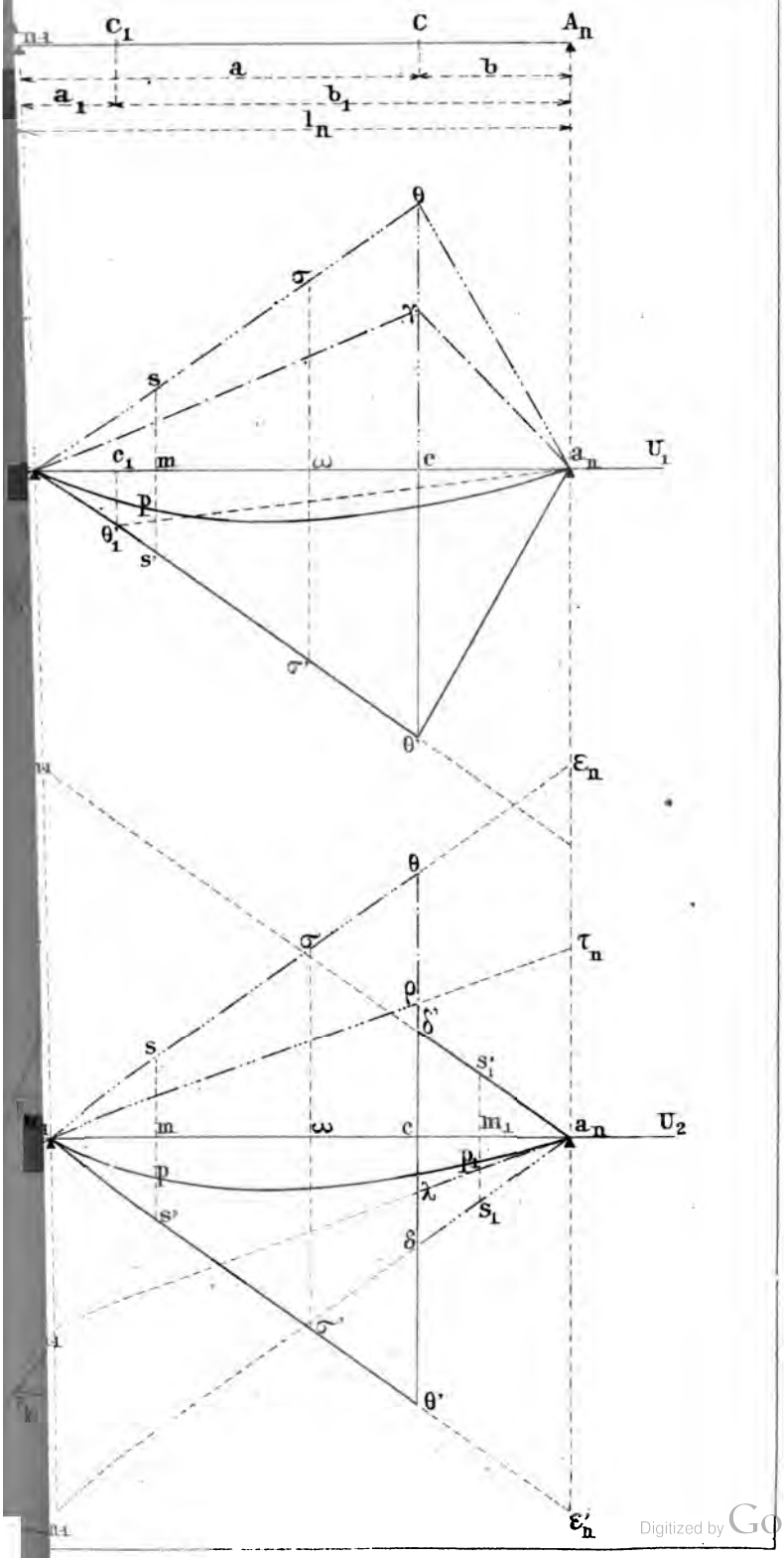


Fig. 18.

Digitized by Google

oise & Courtier, 43, rue de Dunkerque, Paris. (3347-4-89)

Digitized by Google



Digitized by Google

Auto. Imp. A. Broise & Courtier, 43, rue de Dunkerque, Paris 13548 - 58

Digitized by Google